

LES GUSTINS 2022

Tony Sin

Monopoles magnétiques

Intro Dirac 29 Mai 1931 dans

"Quantized singularities of the EM field"

prouve l'affirmation suivante :

"Si au moins un seul monopole magnétique existe dans l'univers tout entier, alors toutes les charges électriques doivent être quantifiées".

But de la présentation :
 • Comprendre cette affirmation
 • lien avec la géométrie & la topologie.

Plan I) Rappels d'EMG, position du problème

II) Argument de Dirac

III) Introduction aux fibres & théorie de jauge.
 x ex du Ruban de Möbius.

IV) Géométrie du monopole

V) Si on a le temps ... plus de maths. Définition d'une connexion

Quelques références que j'aime bien.

"Geometry, topology & physics" Mikio Nakahara

"Lectures on geometrical anatomy of theoretical physics"

Youtube Frédéric Schuller

"Topological and geometrical aspects of band theory"

Cayssol & Fuchs

I) Rappels d'EMG, position du problème

Eqs de Maxwell ($c=1$, unités gaussiennes)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\delta t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{J} + \delta t \vec{E}$$

ρ densité charge électrique, \vec{J} courant électrique

Remarque immédiate: \vec{B} est divergence nul, pas \vec{E} .

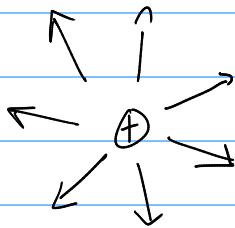
Stokes

$0 = \iiint \text{div } \vec{B} dV \stackrel{\downarrow}{=} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$, flux à travers une surface qui est le bord d'un volume est toujours nul.

En particulier \rightarrow pas de monopole magnétique.

Rappel sur les poles électriques.

Monopole électrique: charge ponctuelle.



$$\rho(\vec{r}) = e \delta(\vec{r})$$

Symétrie radiale + $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\hookrightarrow \vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

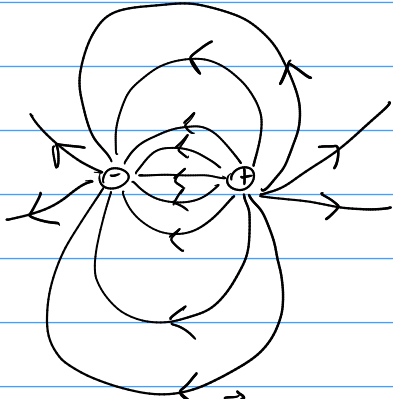
Ensuite $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 4\pi e$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 = 4\pi e$$

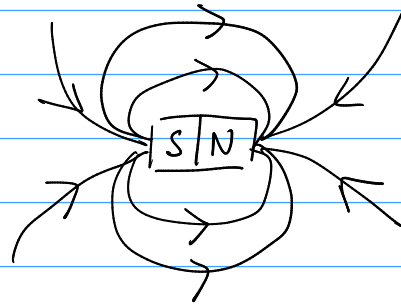
$$\hookrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{e}_r}$$

Dipôles. Electrique



$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - \vec{r}^2 \vec{p}}{r^3} - \frac{\delta^3(\vec{r}) \vec{p}}{3}$$

Magnétique



$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{r}^2 \vec{m}}{r^3}$$

↙ ↘
Traitement analogue

Mais! Possibilité de séparer les charges électriques mais pas les "charges" magnétiques.

Potentiel vecteur

EMG peut être formulé de façon compacte à partir de la 1-forme.

$$A := A_x dx + A_y dy + A_z dz - \phi dt$$

↳ 4 dim

\vec{A} potentiel vecteur
 ϕ potentiel électrique

Relations avec les champs électriques et magnétiques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A}$$

Invariance de jauge: on ne change pas la valeur des champs par la transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} V$$

$$-\phi \rightarrow -\phi - \partial_t V$$

tenseur
electro
magnétique

$$F = dA \quad d(A + d\theta) = dA$$

↳ $d^2 = 0$ traduction de l'invariance de jauge.

Formulation Hamiltonienne de l'EM

En présence d'un champ EM l'Hamiltonien devient

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 - q\phi$$

Bracket de Poisson.

\vec{p} le moment canoniquement conjugué à \vec{x}

↓

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{A, B\} := \sum_{i=1}^N \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}$$

moment "mécanique"

Rem: $\vec{p} \neq m\vec{v}$!

Preuve: $\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m} (p_j - qA_j)$

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

↑ Une des eq d'Hamilton-Jacobi.

L'autre eq donne les eqs du mouvement

$$m\vec{a} = \sum \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{h}} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

on ne cherche que cette partie

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

$$\hookrightarrow m\ddot{x}_j + q\dot{A}_j = \frac{q}{m} \partial_{x_j} A_i \underbrace{(p_i - qA_i)}_{:= v_i} - q\partial_{x_j} \phi$$

$$\dot{A}_j = \partial_t A_j + \underbrace{v_i \partial_{x_i} A_j}_{\text{Einstein's convention}}$$

$$m\ddot{x}_j = \underbrace{q(\partial_{x_j} \phi - \partial_t A_j)}_{E_j} + q \underbrace{(v_i \partial_{x_j} A_i - v_i \partial_{x_i} A_j)}_{(\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \times \vec{A})_j}$$

II) Argument de Dirac

Son approche : Supposons que les monopoles magnétiques existent même si on en a jamais vu, produit-on des contradictions ou des idées nouvelles ?

Pour l'anecdote Dirac était motivé par l'intrigant fait expérimental

$$\frac{hc}{e^2} = 137$$

mais il a finalement été avéré ailleurs...

Supposons qu'on a un monopole magnétique de façon tout à fait analogue au monopole électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta(\vec{r})$$

\hat{z} "Charge" magnétique

Pour un monopole isolé :

$$\vec{B} = \frac{g}{r^2} \vec{e}_r$$

1^{ère} remarque : Impossible si \vec{A} est analytique

Preuve

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V^+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial V^-} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

↓ Stokes
si \vec{A} \vec{B} partout sur la sphère

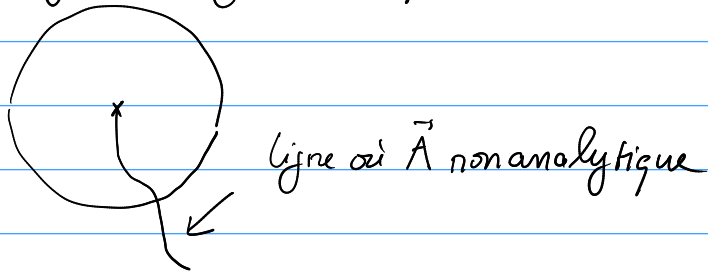
$$= \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{\partial V^-} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$= 0$$

Dirac dit si le monopole existe, il faut que \vec{A} soit non analytique quelque part pour mettre en défaut le raisonnement précédent.

Dirac string.

Dirac suppose qu'il y a une ligne sur laquelle le potentiel diverge



Interprétation du potentiel vecteur en mécanique quantique

On promeut les variables en opérateurs et le crochet de Poisson en crochet de Lie

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{P}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}}))^2 - q\phi(\hat{\vec{x}})$$

$\hat{\vec{P}}$ moment canonique \rightarrow générateur des translations

Appartient: Si $[X, P] = i\hbar$, \hat{P} génère les translations?

$$Xe^{-i\varepsilon P} |x\rangle = e^{-i\varepsilon P} X |x\rangle + \varepsilon |x\rangle \stackrel{\hbar=1}{\approx} (X + \varepsilon) (e^{i\varepsilon P} |x\rangle)$$

$$[X, e^{-i\varepsilon P/\hbar}] \approx -i\varepsilon [X, P] = \varepsilon$$

vecteur propre associé à $|x + \varepsilon\rangle$

Schrödinger. $\partial_t |\psi\rangle = -iH|\psi\rangle$

$$\partial_t \psi(x) = -i \langle x | H | \psi \rangle = \frac{-i}{2m} (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi(x) - q\phi\psi(x)$$

\downarrow
comme si on avait introduit une "dérivée effective"

$$\downarrow$$

$:= \langle x | \psi \rangle$

7

$$\psi^A(x,t) = e^{iq \left(\int_{x_0}^x \vec{A} \cdot d\vec{\ell} - \int_{t_0}^t \phi dt' \right)} \psi(x,t) \quad (x_0, t_0) \text{ point arbitraire}$$

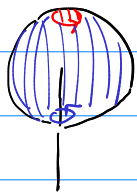
\hat{L} Solution avec le champ EM \hat{L} Solution sans champ Le fait que le point est arbitraire est une manifestation de l'invariance globale de jauge

$$-i \partial_x \psi^A = -i \partial_x \psi - i (iq) A_x(x) \psi$$

— compense l'autre contribution.

Interpretation de \vec{A} : variation spatiale de la phase d'un point à l'autre

Imaginons maintenant que le fil de Dirac est vertical pour plus de simplicité.



$$q \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Surface rouge.}$$

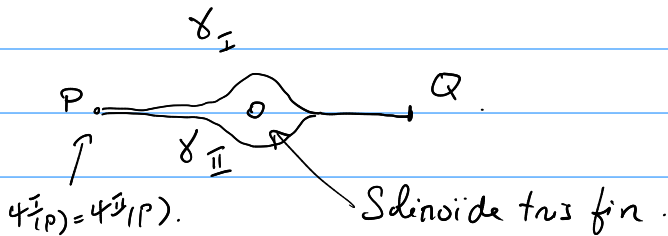
$$q \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \approx 4\pi q$$

\uparrow \hookrightarrow A diverge ici.
 contour infinitésimal!

Mais ce point n'a a priori rien de spécial, le choix du fil de Dirac est arbitraire.

Si $q \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \neq 2\pi n$, on pourrait le détecter avec une expérience d'interférence.

Ex Aharonov-Bohm



$$\psi_I^A(Q) + \psi_{II}^A(Q) = e^{iq \int_{\gamma_I} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \psi_I(Q) + e^{iq \int_{\gamma_{II}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \psi_{II}(Q)$$

$$= e^{iq \int_{\gamma_{II}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \left(e^{iq \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \psi_I(Q) + \psi_{II}(Q) \right)$$

phase globale qui s'en va \hat{L} détectable dans le pattern d'interférences

8

Donc si $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \neq 2\pi n$ on pourrait détecter le fil avec une expérience d'interférence

Ainsi on a $2\pi n = \frac{q}{c} 4\pi g$

$$\boxed{2gq = n}$$

- 2 remarques :
- explique l'affirmation initiale que même si un seul monopôle existe dans l'univers alors toutes les charges sont quantifiées.
 - Donne une relation entre le quantum de charge électrique et magnétique.

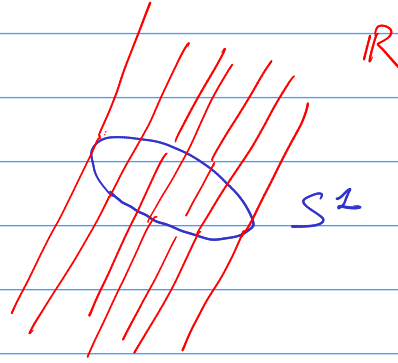
III Introduction aux Fibrés et théories de jauge

Grossièrement, un fibré est "espace topologique localement décomposable en un produit cartésien entre un espace dit l'espace de base M et une fibré F ."

Ex avec un produit global:

$$\text{Cylindre} \cong S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix} & \nearrow & \\ M & & F \end{matrix}$$



Pour simplifier, on se tiendra aux fibrés principaux.

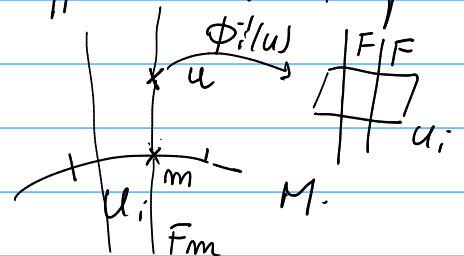
Def Un fibré principal est constitué des éléments (P, π, M, F)

- i) P espace total
- ii) M espace de base
- iii) F groupe de Lie continu qui est notre fibré
- iv) Projection $\pi: P \rightarrow M$ $\pi^{-1}(p) = F_m$ fibre au-dessus de p
 $m \in M$

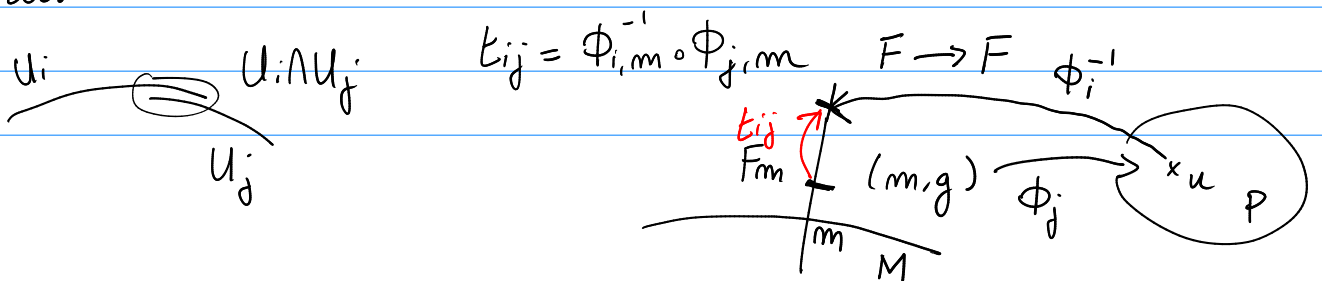
v) Un ensemble $\{U_i\}$ qui couvrent M tels que sur chaque patch U_i on ait une trivialisation locale c à d un diffeo Φ_i tel que

$$\Phi_i: U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

$$\pi \circ \Phi_i = \text{id}_M$$



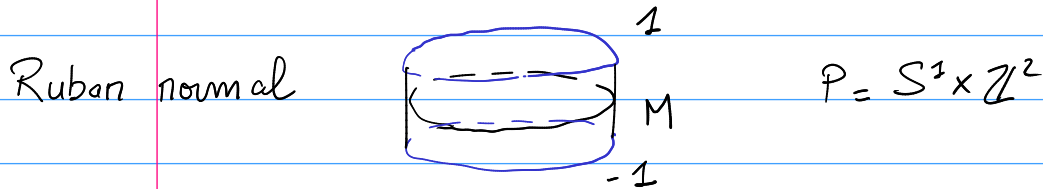
vi) Des fonctions dites de transition sur les intersections des patches.



t_{ij} élément de G .

Ex avec un groupe qui n'est pas de Lie : Ruban de Möbius.

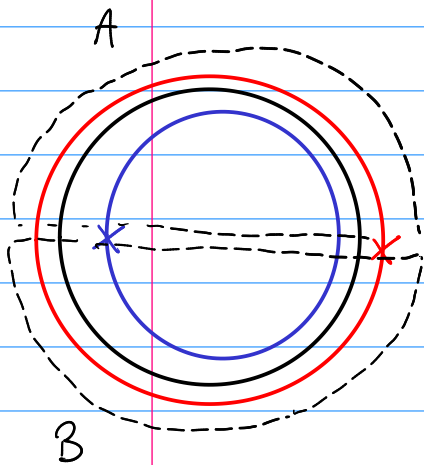
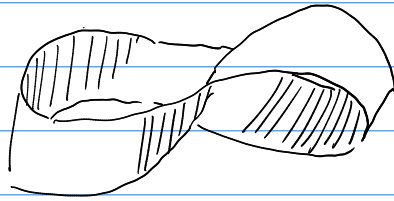
$$F = \mathbb{Z}^2 = \{1, -1\} \quad M = S^1$$



$$\phi^{-1}(u) = [\theta, t) \quad \text{defini globalement}$$

$\in [0, 2\pi[\quad \cup \mathbb{Z}^2$

Ruban de Möbius.



$$\left. \begin{array}{l} U_1 =]0; 2\pi[\\ U_2 =]-\pi; \pi[\end{array} \right\} \text{ 2 ensembles qui couvrent } M$$

$$U_1 \cup U_2 = A \cup B$$

Encart : groupe G

ensemble d'éléments $\{g\}$ muni d'une loi de composition \circ et d'un élément neutre e tels que

$$g_1 \circ g_2 \in G$$

$$\forall g \exists \text{ inverse } g^{-1} \text{ tel que } g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

Associativité

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$$

11

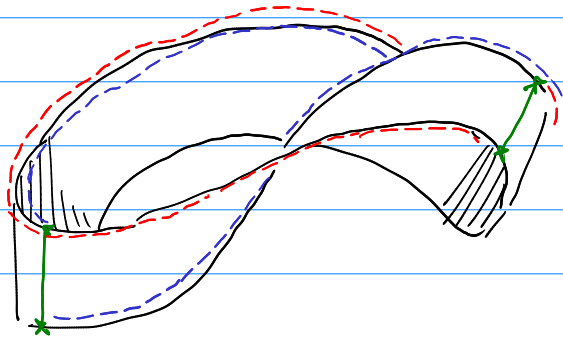
Trivialisations locales sur chaque domaine

$$\Phi_1^{-1}(u) = (\theta, t)$$

$$\Phi_2^{-1}(u) = (\theta, t).$$

Maintenant il faut aussi définir les transitions sur chaque domaine

$$\left. \begin{array}{l} u \in A \quad t_{12} = 1 \\ u \in B \quad t_{12} = -1 \end{array} \right) \text{ éléments de groupe.}$$



En pointillés : bord
associé à 1 dans la
convention 1 & 2
accord sur A
désaccord sur B.

IV) Géométrie du monopole

Espace de base : espace physique $\mathbb{T} = \mathbb{R}^3 - \{0\}$

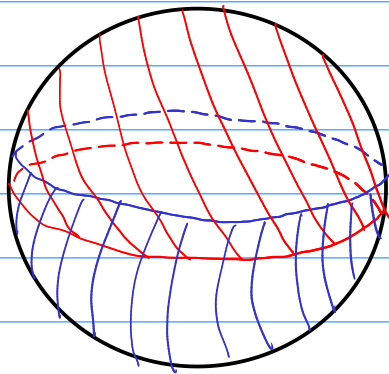
Fibre $F = U(1) \{e^{i\theta}\} \theta \in \{0; 2\pi\}$.

2 patches qui couvrent l'espace, Coordonnées sphériques

$$U_N = \{(\theta, \phi), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon/2\} \quad \varepsilon \text{ petit}$$

$$U_S = \{(\theta, \phi), \frac{\pi}{2} - \varepsilon/2 \leq \theta \leq \pi\}$$

U_N



ε overlap sur cette bande

U_S

← éléments de $U(1)$

Trivialisations locales $\phi_N^{-1}(u) = (m, e^{i\alpha_N})$

$$\phi_S^{-1}(u) = (m, e^{i\alpha_S})$$

Fonction de transition sur l'équateur: $t_{NS}(m) = e^{i\pi\phi} \underset{:=\varphi}{}$

$$e^{i\alpha_N} = e^{i\pi\phi} e^{i\alpha_S}$$

$n \in \mathbb{Z}$ pour que t_{NS} soit univoqué

n caractérise la structure topologique (groupe d'homotopie $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$)

Ce qu'on avait conclu auparavant \rightarrow jauge représentait les variations de cette phase le long d'un chemin.

Variation de phase le long d'un chemin infinitésimal

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} := \alpha_N \quad \sim \quad \alpha_N(\vec{\pi} + d\vec{l}) - \alpha_N(\vec{\pi}) \quad \text{d'angle } \theta = \pi$$

Wu
Yang

$$\alpha_N := g(1 - \cos \theta) d\phi \quad \vec{A}_N = \frac{g(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{e}_\phi$$

$$\alpha_S = -g(1 + \cos \theta) d\phi \quad \vec{A}_S = -\frac{g(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{e}_\phi$$

$$\Delta \alpha_N - \Delta \alpha_S = \Delta \phi$$

\uparrow d'angle $\theta = 0$

$$g(\alpha_N - \alpha_S) = d\phi$$

$$g \int g d\phi = d\phi \quad \left. \begin{array}{l} \int \\ \int \end{array} \right\} \text{intégrer } \phi \text{ de } 0 \text{ à } 2\pi$$

$$g \int 4\pi g = \Delta \phi = 2\pi n \quad \left. \begin{array}{l} \int \\ \int \end{array} \right\} \text{On récupère la condition de quantification}$$

α_N / α_S est ce qu'on appelle un potentiel de Jay-Kills

pullback d'une 1-form à valeur dans \mathfrak{g} local

$$A_i \equiv \delta_i^\mu w$$

\leftarrow objet à partir duquel on peut découper le fibré en un espace vertical et horizontal et définir le transport parallèle.