# Gustins 2023 - Inégalités de Bell

Tony JIN

Refs : "Le mystère des gâteaux quantiques" YouTube Science Étonnante

↳ "The mystery of quantum cakes" AAPT (2000)

"Bell non locality" Rev Mod Phys 86

"A simple proof of Bell's inequality" AAPT (2013).

I) Rappel corrélations & axiomes mesures quantiques

II) Gâteaux quantiques

III) Définition formelle. Corrélations supra-quantiques

## I) Rappel corrélations & axiomes mesures quantiques

### Chat de Schrödinger

$\mathcal{H}$ espace de Hilbert

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vecteur $\langle\psi|$ dual

$\langle\psi|\varphi\rangle$ produit scalaire hermitien.

Axiome PQ : $\hat{O}$ observable → "propriété de l'objet qu'on peut mesurer"

$\hat{O} \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ $\hat{O}^{\dagger} = \hat{O}$

$$\hat{O} = \sum_j O_j \hat{\mathbb{P}}_j \qquad \{\hat{\mathbb{P}}_j\} \text{ POVM} \qquad \sum_j \hat{\mathbb{P}}_j = \mathbb{1} \qquad \hat{\mathbb{P}}_j \geqslant 0$$

positive operator valued measure

positive semi-definite

$j$ indexe les résultats possibles, $O_j$ valeur de la mesure

Probabilité d'obtenir $O_j$ comme résultat :

$$p_j := p(\hat{O} = O_j) = \langle\psi| \hat{\mathbb{P}}_j |\psi\rangle$$

On a bien $p_j \geqslant 0$ $\quad \sum_j p_j = 1$ $\Big)$ Bonne mesure de probabilité

$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$

Après la mesure, l'état est mis à jour

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{\hat{\mathbb{P}}_j |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{\mathbb{P}}_j | \psi \rangle}} \quad \text{avec proba} \quad \langle \psi | \hat{\mathbb{P}}_j | \psi \rangle .$$

↳ "Quantum backaction" : Mesure affecte l'état

<u>Exemple</u> $\mathcal{H}$ dim 2

Base $\{ |0\rangle, |1\rangle \}$

$\hat{O} = |1\rangle\langle 1|$ , notation matricielle $\hat{O} = \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |0\rangle + |1\rangle )$

$p_0 = \frac{1}{2} ( \langle 0| + \langle 1| ) |0\rangle\langle 0| ( |0\rangle + |1\rangle ) = \frac{1}{2}$

$p_1 = \frac{1}{2}$

$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$

Si on mesure 0, après la mesure $|\psi\rangle = |0\rangle\langle 0|$ sinon $|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1|$

On donne souvent l'exemple du chat dans une superposition mort/vivant...

Beaucoup plus naturel d'utiliser l'argument "classique" : on ne sait pas quel est l'état du chat, cela ne signifie pas que son état n'est pas bien défini et "préexiste" à la mesure.

## <u>2 observateurs : corrélations ou intrication ?</u>

Situation canonique qu'on considérera par la suite souvent

Deux observateurs A & B (Alice et Bob)

Un état $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ peut être factorisé $\underset{\substack{\nearrow \\ \text{support des observables} \\ \text{auxquelles A a accès}}}{\mathcal{H}_A} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Idem pour B}}}{\mathcal{H}_B}$

$\hat{O}^A$ observable d'Alice $\hat{O}^B$, Bob

$[\hat{O}^A, \hat{O}^B] = 0$

↳ Probabilité à plusieurs variables :

$$P(\hat{O}^A = o_j^A, \hat{O}^B = o_k^B) = \langle\psi| \hat{P}_j^A \otimes \hat{P}_k^B |\psi\rangle = \mathrm{tr}(\underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{:=\rho} \hat{P}_j^A \otimes \hat{P}_k^B)$$

$\rho$ → Matrice densité

$\rho$ contient toutes les informations sur les corrélations du système

<u>Exemple</u> Base de $\mathcal{H}$ dim 4 : $\{|\overset{A}{0}\overset{B}{0}\rangle\ |01\rangle\ |10\rangle\ |11\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle).$$

$$\hat{O}^A = |1\rangle\langle 1| \otimes (\mathbb{1}^B) \qquad \hat{O}^B = \mathbb{1}^A \otimes (|1\rangle\langle 1|)$$

$$\hat{O}^A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{O}^B = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Quid de ça ??

Correspond à $P(0,0)$ $P(0,1)$ $P(1,0)$ $P(1,1)$

Si on a accès qu'à $\hat{O}^A, \hat{O}^B$ → interprétation classique claire : variables parfaitement anti-corrélées.

Dans ce cas il y a toujours une interprétation possible de l'existence d'une variable aléatoire "cachée" $\lambda$ telle que

$$P(\hat{O}^A, \hat{O}^B) = \rho(\lambda)\ p(\hat{O}^A, \lambda)\ p(\hat{O}^B, \lambda).$$

peut être fixé comme une proba certaine en général

Dans cet exemple $\lambda \in \{+; -\}$. $p(\lambda = +) = p(\lambda = -) = 1/2$

$$p(\hat{O}^A = O^A, +) = \delta_{O^A, 1} \qquad p(\hat{O}^B = O^B, +) = \delta_{O^B, 0}$$
$$p(\hat{O}^A = O^A, -) = \delta_{O^A, 0} \qquad p(\hat{O}^B = O^B, -) = \delta_{O^B, 1}$$

Dans les cas qu'on va étudier A & B pourront en général avoir accès à plusieurs observables. On rajoute un indice pour tenir compte de ça :

$\hat{O}^A_x$ $\quad x \in$ Ensemble fini discret $\{1, \cdots, m\}$

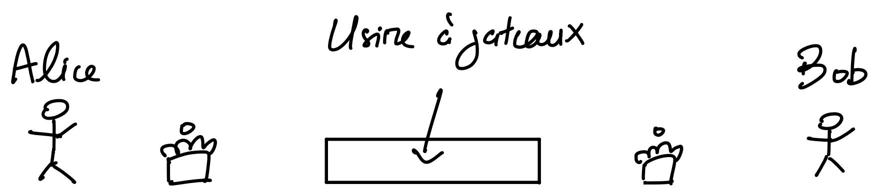
On a toujours $[\hat{O}^A_x, \hat{O}^B_y] = 0 \quad \forall (x, y)$

Mais en général $[\hat{O}^A_x, \hat{O}^A_y] \neq 0 \quad x \neq y$.

ce qu'on appelle en mécanique quantique le principe d'incertitude

$\longrightarrow$ le système n'a jamais simultanément une valeur bien définie de $\hat{O}^A_x$ et $\hat{O}^A_y$

## II) Gateaux quantiques




Gateaux ont 2 propriétés : 1 : Bons ou mauvais.

2 : Contiennent ou non du For

A & B ne peuvent tester qu'une de ces propriétés à la fois.
Ils répètent plein de fois l'expérience et comparent la statistique de leurs résultats.

Dans cet exemple particulier

- Dans 9% des cas les 2 gâteaux ont du fer
- À chaque fois qu'un observateur a du fer dans son gâteau, l'autre était bon. (Rem: on ne requiert pas que l'inverse soit vrai)

Dans le cas classique, la probabilité d'avoir 2 gâteaux bons $p(Bon, Bon)$ au moins être supérieure à 9%.

Il s'avère qu'on peut construire un exemple quantique où $p(Bon, Bon) = 0$!

Deux observables

$$\hat{O}^A_b, \hat{O}^A_f, \hat{O}^B_b, \hat{O}^B_f$$

$$\hat{O}^A_b = |b_+\rangle\langle b_+| - |b_-\rangle\langle b_-|$$

$$\hat{O}^A_b = |f_+\rangle\langle f_+| - |f_-\rangle\langle f_-|$$

$$|b_+\rangle = \left(\tfrac{2}{5}\right)^{1/2} |f_+\rangle + \left(\tfrac{3}{5}\right)^{1/2} |f_-\rangle$$

$$|b_-\rangle = -\left(\tfrac{3}{5}\right)^{1/2} |f_+\rangle + \left(\tfrac{2}{5}\right)^{1/2} |f_-\rangle$$

Inverse.

$$|f_+\rangle = \left(\tfrac{2}{5}\right)^{1/2} |b_+\rangle + \left(\tfrac{3}{5}\right)^{1/2} |b_-\rangle$$

$$|f_-\rangle = \left(\tfrac{3}{5}\right)^{1/2} |b_+\rangle - \left(\tfrac{2}{5}\right)^{1/2} |b_-\rangle$$

état symétrique $A \leftrightarrow B$

Et on considère l'état

$$|\psi\rangle = \left(\tfrac{3}{8}\right)^{1/2} \left(|b_+, b_-\rangle + |b_-, b_+\rangle\right) - \tfrac{1}{2} |b_-, b_-\rangle$$

Normalisation: $\langle\psi|\psi\rangle = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 1$ ok ✓

$$P(b_+, b_+) = \langle\psi|b_+, b_+\rangle\langle b_+, b_+|\psi\rangle = 0$$

Impossible d'avoir 2 bons gâteaux

Imaginons que Bob a eu du fer dans son gâteau

Conditionné à ce résultat

$$|\psi|\hat{O}^B_b = f+\rangle = \frac{(\mathbb{1}^A \otimes |f+\rangle\langle f+|)\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|(\mathbb{1}^A \otimes |f+\rangle\langle f+|)|\psi\rangle}}$$ Doit une probabilité conditionnée

$$(\mathbb{1}^A \otimes |f+\rangle\langle f+|)\,|\psi\rangle = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/2}\left(-\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}|b+,f+\rangle + \left(\frac{2}{5}\right)^{1/2}|b-,f+\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}|b-,f+\rangle\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{\sqrt{40}}\,|b+\rangle + 0 \times |b-\rangle\right) \otimes |f+\rangle$$

Magic

Après normalisation (et absorption du facteur de phase)

$$|\psi|\hat{O}^B_b = f+\rangle = |b+,f+\rangle$$

Et finalement $p(f+,f+) = \langle\psi|f+,f+\rangle\langle f+,f+|\psi\rangle$

$$= \frac{9}{40}\,|\langle f+|b+\rangle|^2$$

$$= \frac{9}{40}\,\frac{2}{5} = \frac{18}{200} = \underline{9\%}\;!$$

## III) Définition formelle. Corrélations supra-quantiques

- Scenario de Bell
- Local ($\mathcal{L}$), Quantum ($Q$), No-signalling (NS)
- Déf inégalité
- Ex $\Delta = m = 2$ Inégalité CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt)

### Scenario de Bell

Deux observateurs causalement séparés reçoivent un objet d'une source commune.

Peuvent respectivement mesurer les observables $x$ & $y$

$m$ choix possibles

$a(x)$, $b(y)$ résultats possibles de ces mesures

$\Delta$ résultats possibles.

Toutes les propriétés statistiques d'un scenario de Bell sont caractérisées par $p(ab|xy)$

Probabilité d'obtenir le résultat $ab$ après avoir décidé de mesurer $(x,y)$

On requiert seulement que cela définisse bien une probabilité :

$$p(ab|xy) \geq 0 \quad \forall (a,b,x,y)$$

$$\sum_{a,b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = 1 \quad \forall (x,y)$$

## Corrélations locales ($\mathcal{L}$)

On peut toujours les écrire sous la forme

$$p(ab|xy) = \int d\lambda\, q(\lambda)\, p(a|x,\lambda)\, p(b|x,\lambda)$$

i.e $\exists$ une variable aléatoire cachée dont la connaissance permet de rendre statistiquement indépendants les mesures d'$A$ & $B$

## Corrélations quantiques ($Q$)

On peut toujours écrire les corrélations sous la forme

$$p(ab|xy) = \langle\psi| \hat{P}^A_{a|x} \otimes \hat{P}^B_{b|y} |\psi\rangle$$

$\{\hat{P}^A_{a|x}\}_a$, $\{\hat{P}^B_{b|y}\}_b$ POVMs associés à $\hat{O}^A_x$, $\hat{O}^B_y$

Si on regarde le sous-ensemble de $\mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda p_\lambda |\psi_\lambda\rangle_A \otimes |\varphi_\lambda\rangle_B$$

$\in \mathcal{H}_A$ $\in \mathcal{H}_B$

Alors $p(ab|xy)$ est local

Donc $\mathcal{L} \subset Q$

## Corrélations No-Signalling (NS)

$p(ab|xy)$ doit vérifier

$$\sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum_{b=1}^{\Delta} p(ab|xy') \quad \forall a,x,y,y'$$

et vice-versa

$$\sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|xy) = \sum_{a=1}^{\Delta} p(ab|x'y) \quad \forall b,y,x,x'$$

↳ on ne peut pas communiquer de l'information (i.e le choix de l'observable mesuré) via les corrélations

Pour les corrélations quantiques la propriété

$$\sum_{a=1}^{\Delta} \hat{P}^A_{a|x} = \sum_{b=1}^{\Delta} \hat{P}^B_{b|y} = \mathbb{1}$$

nous assure que c'est vrai.

Donc $\mathcal{L} \subset Q \subset NS$.

De plus, on peut montrer que tous ces espaces ont la même dimension

$$t := 2(\Delta-1)m + (\Delta-1)^2 m^2$$

$\mathcal{L}, Q, NS$ sont fermés, bornés et convexes

Les domaines entre ces ensembles sont définis par des inégalités définies par un couple $(s, S_k)$

$$s.p := \sum_{abx} s_{xy}^{ab}\, p(ab|xy) \leqslant S_k$$

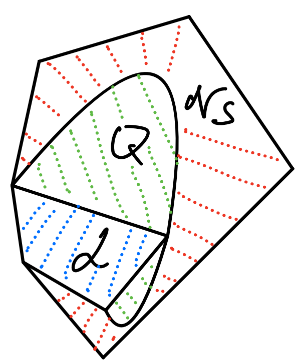
où $k$ est un index pour désigner l'ensemble qui vérifie l'inégalité

$k = \mathcal{L} \longrightarrow$ Inégalités de Bell

$k = Q \longrightarrow$ Inégalités de Tsirelson

Structure générale

$\mathcal{L}$ et $NS$ sont des polytopes




<u>Un exemple important $m = \Delta = 2$</u>

Inégalité CHSH $\quad a, b \in \{-1, +1\}$, $x, y \in \{0, 1\}$

$$M = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leqslant 2$$

Rappel : Hyp de localité : $p(ab|xy) = \int d\lambda\, p(\lambda)\, p(a|x,\lambda)\, p(b|y,\lambda)$

$$M = \int d\lambda \, M_\lambda$$

$$M_\lambda = \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda + \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda + \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda - \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda$$

$$M_\lambda \leqslant \left| \langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda \right| + \left| \langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda \right|$$

Supposons $\langle b_0 \rangle_\lambda \geqslant \langle b_1 \rangle_\lambda \geqslant 0$ (les autres cas s'obtiennent simplement en renommant les objets ci-dessus).

$$M_\lambda \leqslant \text{"} \quad \text{"} = 2 \langle b_0 \rangle_\lambda \leqslant 2$$

$$M \leqslant 2$$

Ex d'état quantique qui viole cette inégalité :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |01\rangle - |10\rangle \right)$$

vecteurs propres de $\sigma_z$

2 observables

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{et} \quad \vec{y} \cdot \vec{\sigma}$$

$\vec{\sigma}$ Matrices de Pauli.

2 configurations

$$x = 0 \longrightarrow \vec{x} = \vec{e_1}$$

$$x = 1 \longrightarrow \vec{x} = \vec{e_2}$$

orthogonaux

$$y = 0 \longrightarrow \vec{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \vec{e_1} + \vec{e_2} \right)$$

$$y = 1 \longrightarrow \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\vec{e_1} + \vec{e_2} \right)$$

$$\langle a_x b_y \rangle = \langle \psi | \, \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \vec{y} \cdot \vec{\sigma} \, | \psi \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_z \begin{pmatrix} y_z & y_x - i y_y \\ y_x + i y_y & -y_z \end{pmatrix} & x_x - i x_y \begin{pmatrix} \text{"} & \text{"} \end{pmatrix} \\ x_x + i x_y \begin{pmatrix} \text{"} & \text{"} \end{pmatrix} & -x_z \begin{pmatrix} \text{"} & \text{"} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} '' & '' \\ -x_z y_z - (x_x - i y_y)(y_x + i y_y) & \\ (x_x + i y_y)(y_x - i y_y) + x_z y_z & \\ '' & '' \end{pmatrix}$$

$$= - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

À partir de là $\langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 b_1 \rangle = \langle a_1 b_0 \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle a_1 b_1 \rangle = -1/\sqrt{2}$

$$\boxed{M = 2\sqrt{2} > 2.}$$

Borne supérieure de $M$ pour des corrélations quantiques :

Rappel, on avait : $M = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$

Dans le langage quantique $M$ correspond à la valeur moyenne de l'opérateur

$$\hat{M} := \hat{O}_0^A \hat{O}_0^B + \hat{O}_0^A \hat{O}_1^B + \hat{O}_1^A \hat{O}_0^B - \hat{O}_1^A \hat{O}_1^B$$

opérateurs dont les valeurs propres valent $\pm 1$

$$= \hat{O}_0^A (\hat{O}_0^B + \hat{O}_1^B) + \hat{O}_1^A (\hat{O}_0^B - \hat{O}_1^B)$$

On a $\left(\hat{O}_{0/1}^{A/B}\right)^2 = \mathbb{1}$

$$\hat{M}^2 = (\hat{O}_0^B + \hat{O}_1^B)^2 + (\hat{O}_0^B - \hat{O}_1^B)^2 + \hat{O}_0^A (\hat{O}_0^B + \hat{O}_1^B) \hat{O}_1^A (\hat{O}_0^B - \hat{O}_1^B)$$
$$+ \hat{O}_1^A (\hat{O}_0^B - \hat{O}_1^B) \hat{O}_0^A (\hat{O}_0^B + \hat{O}_1^B)$$

$$\hat{M}^2 = 4 + [\hat{O}_0^A, \hat{O}_1^A][\hat{O}_0^B, \hat{O}_1^B]$$

$$\|\hat{M}^2\| \leqslant 8 \qquad \|M\| \leqslant 2\sqrt{2}$$

on avait saturé la borne

norme spectrale
(plus grande valeur propre)

"limite quantique"

## Violation de la limite quantique

On exhibe un exemple :

Modulo 2 après avoir ramené $\{-1\ 1\} \to \{0\ 1\}$

$$p(ab|xy) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } a \oplus b = xy \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Explicitement :

$x = 0 \quad y = 0$

$p(\underset{-1\,-1}{00}|00) = p(\underset{1\,1}{11}|00) = 1/2$

$p(\underset{-1\,1}{01}|00) = p(\underset{1\,-1}{10}|00) = 0$

Idem $x=0, y=1$

$x=1, y=0$

$x = 1 \quad y = 1$

$p(\underset{-1\,-1}{00}|11) = p(\underset{1\,1}{11}|11) = 0$

$p(\underset{-1\,1}{01}|11) = p(\underset{1\,-1}{10}|11) = 1/2$

Dans ce cas là

$$M = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Algebraic maximum

Version "extrême" des gâteaux quantiques.