Réf : "Group theory in physics" Wu-Ki Tung.

"The classical groups" H. Weyl.

But : Trouver les rep irréductibles de $GL(n)$ et les invariants associés.

$GL(n)$ groupe des matrices inversibles

Rep matricielle $U(g)$ $g \in GL(n)$ $U(g)$ matrice $d \times d$

Agit sur un espace vectoriel V.

Supposons $U(g)$ irréduc.

Q : Si on considère des produits tensoriels de $GL(n)$ et les reps associées $\underbrace{U(g) \otimes \cdots U(g)}_{n \text{ fois}}$

1) Encore irréductible ?

Décomposition ? } "Blocs" élémentaires de la rep tensorielle.

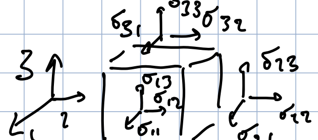
2) Invariants.

Ex : Rotations $SO(3)$

Rep irréductible $SO(3)$ O

$r \in V$ $\quad O r = r \ \forall U \Rightarrow r = 0$

$t \in V \otimes V$ $\quad O \otimes O \, t = t \ \forall U \Rightarrow$?



$O^i{}_j O^k{}_l t^{jl} = t^{ik}$.

$O^i{}_j t^{jl} (O^T)_l{}^k = t^{ik}$.

tenseur contraintes.

$t_j{}^l = \delta_j{}^l$ α poisoné.

$\frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\, t)^2 - \mathrm{tr}(tt^T)\right)$ poisoné.

$\det(t)$ poisoné.

Pour. ρ matrice densité

ρ évolue selon un processus aléatoire.

$$\mathbb{E}[\rho]_\infty = \int d\eta(U)\, U \rho U^+ = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iHt} \rho e^{iHt}.$$

typ ergo

ρ est projeté sur les invariants $SU(N)$.

$\mathbb{E}[\rho] = \mathrm{tr}(\rho) \cdot \mathbb{1}$

$\mathbb{E}[\rho \otimes \rho]$?

Décomposition systématique est possible (Weyl). Fait intervenir de façon surprenante tableaux de Young → compte partitions des entiers.

Pas de preuves dans ce cours.

Plan

I) généralités th des groupes

II) Algèbre de groupe et idempotents

III) Rep irr du groupe des permutations à n éléments S_n

IV) Rep irréd $GL(m)$

I) Généralités théorie des groupes

Déf groupe G: Un ensemble d'éléments muni loi de composition interne $\circ$, élément neutre e tels que.

$\forall a,b \in G \quad ab = c \in G \quad ae = e \ \forall a.$

$\forall a \ \exists a^{-1} \quad aa^{-1} = e$

loi associative.

$$a(bc) = (ab)c.$$

Déf : classe : 2 éléments a, b de G $\in$ à la même classe s'il existe $p \in G$ tel que $pap^{-1} = b$

Ex S_3. Éléments $\{e\}$ $\{(12)\ (23)\ (31)\}$ $\{(123)\ (321)\}$

3 classes distinctes.

Ex. $(12)(31)(12) = (12)(123) = (23).$

$(12)(123)(12) = (12)(13) = (132)$

Déf Une représentation vectorielle de dim d d'un groupe est une application

$$U : g \in G \to U(g) \quad d \times d$$

telle que $\quad U_g U_{g'} = U_{gg'} \quad \forall g, g'$

ex $SO(2)$

Rotations dans le plan.

Indexée par θ. $\quad g_\theta g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}$

$\theta \in [0; 2\pi]$.

Rep dim 1 $\qquad U(g_\theta) = e^{i\theta}$

Rep dim 2 $\qquad U(g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Déf : 2 rep sont équivalents s'il existe M inversible tel que $M\, U(g)\, M^{-1} = U'(g)$ $\forall g$.

↳ définit une classe d'équivalence

Déf : Une rep est réductible s'il $\exists$ sous-espace $V' \subset V$ tel que $U(g)\, v' \in V'$ $\forall g \in G,\ v' \in V'$

$V' \neq \emptyset$, $V' \neq V$

$U(g)$ a alors une forme bloc diagonale

$$U(g) = \begin{pmatrix} \underbrace{(\ )}_{V'} & \\ & \underbrace{(\ )}_{\bar{V}'} \end{pmatrix}$$

Une rep qui n'est pas réductible est irréductible.

<u>Thé</u> # représentations irréductibles non équivalentes de G

= # classes d'équivalences de ses éléments.

S_3 a 3 rep irréductible non équivalents.

<u>Th</u> : Pour un groupe fini

$\sum_\mu d_\mu$ $\quad d_\mu$ dim rep μ (y compris les équivalents)

$= n_G$ # d'éléments dans le groupe

2 rep de dim 1 de S_3

Triviale $g \to 1$ $\qquad (12) \to 1$ $\qquad (12)(23) = (123)$

$(23) \to 1$ $\qquad$ ↳ $1 \times 1 = 1$

Signe $\quad e \to 1$

$((12)(23)(31)) \to -1$

$(123)\ (321) \to 1$

Reste 1 classe de rep. ??

Lemme de Schur $\quad U(g)$ rep irréductible

A matrice $d \times d$ $\quad U(g)\, A\, U(g)^{-1} = A \quad \forall G \quad \Rightarrow A = 0$ ou $\alpha \mathbb{1}$.

II) Algèbre de groupe

On considère des groupes finis.

G groupe $g_i g_j = g_k$

$$g_i g_j = \Delta_i{}^m{}_j \, g_m$$ on triche parce qu'on s'autorise à sommer des éléments du groupe.

"Idée" g_i matrice agit sur g_j un "élément de base"

g_m aussi élément de base.

$(\Delta_i)^m{}_j$ éléments de la matrice associée à g_i.

Th Δ_i forment une rep appelée rep régulière

$g_a g_b = g_c$ alors $\Delta_a \Delta_b = \Delta_c$

Preuve $g_a g_b g_j = g_a \Delta_b{}^m{}_j g_m = \Delta_b{}^m{}_j \Delta_a{}^{m'}{}_m g_{m'}$

$= g_c g_j = \Delta_c{}^{m'}{}_j g_{m'} \Rightarrow \Delta_c = \Delta_b \Delta_a$

Ex S_2 $\quad e \quad (12)$

$\qquad\quad 1 \quad\; 2$

$e\,e = e$

$e\,(12) = (12)$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(12)\,e = (12)$

$(12)(12) = e$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rep de S_2.

$\Delta_1^2 = \Delta_1 \qquad \Delta_2^2 = \Delta_1 \qquad \Delta_1\Delta_2 = \Delta_2 \ldots$

g joue le rôle hybride d'un opérateur et d'un élément du groupe.

Pour jouir de l'addition on va devoir s'équiper d'une nouvelle structure : l'algèbre de groupe.

<u>Déf</u> Algèbre de groupe $\tilde{G}$

G groupe $\qquad$ $\tilde{G}$ combinaisons linéaires $x = g_i x^i$ $\quad x^i \in \mathbb{C}$, $g_i \in G$

Élément de $\tilde{G}$ $\quad |x\rangle$.

$\tilde{G}$ hérite d'une multiplication à gauche et à droite de G

$|g_i\rangle \in \tilde{G}$

$$x|g_i\rangle = |x^j g_j g_i\rangle = |x^j \Delta_{ji}^{m} g_m\rangle = x^j \Delta_{ji}^{m} |g_m\rangle .$$

multiplication non commutative $\rightarrow$ structure d'anneau

<u>Th</u> Rep régulière contient toutes les rep inéquivalentes μ, d_μ fois où d_μ est la dimension de la rep μ.

De plus $\quad \sum_\mu n_\mu^2 = n_G$

Dans la rep régulière on peut donc représenter les éléments sous la forme.

classe

$$U(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & U^2 & & & & & \\ & & U^2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & U^{n_c} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & U^{n_c} \end{pmatrix}$$

bloc de taille $n_c \times n_c$

Les sous-espaces correspondants aux blocs sont des <u>idéaux</u>

$\swarrow$:= idéal minimal.

qu'on indexe $\mathcal{L}^{\mu}_{a}$ ← irrép ↖ quel sous-bloc) sous-espace stable par action à gauche de tout élément de $\tilde{G}$

Un objet important auquel on va s'intéresser sont les projecteurs sur ces blocs. P^{μ} $\quad P^{\mu}|r\rangle \in \mathcal{L}^{\mu} \ \forall r \in \tilde{G}$.

e opérateur identité $\quad e = \sum_{\mu} e_{\mu} \quad e_{\mu} \in \mathcal{L}^{\mu}$

$$\boxed{e_{\mu} e_{\nu} = \delta_{\nu\mu} e_{\mu}}$$

Th Un projecteur P^{μ} sur $\mathcal{L}^{\mu}$ est obtenu par l'action à droite de e^{μ} $\quad P^{\mu}|r\rangle = |r e^{\mu}\rangle$.

$\therefore$ $r e_{\mu} \in \mathcal{L}^{\mu}$ since $e_{\mu} \in \mathcal{L}^{\mu}$ but not $e_{\mu} r$.

Axiomes projecteur

(i) $P^{\mu}|r\rangle \in \mathcal{L}^{\mu}$ $\qquad$ (iii) $P^{\mu} s = s P^{\mu} \ \forall s \in \tilde{G}$

(ii) $q \in \mathcal{L}^{\mu}$ $P^{\mu}|q\rangle = |q\rangle$ $\qquad$ (iv) $P^{\mu} P^{\nu} = \delta^{\mu\nu} P^{\mu}$.

Déf Un idempotent qui génère un idéal minimal est dit primitif.

Th Un idempotent est primitif ssi $e_i r e_i = \lambda_r e_i$

III) Rep irréductibles de S_n

On travaille dans l'algèbre de groupe

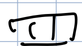
On introduit les objets suivants.

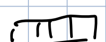
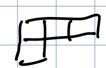
Déf

Diagramme de Young : Suite $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots$

\# de boîtes à la i-ème ligne

$\sum_i \lambda_i = n$.

$n = 3$ $\{3\}$  $\{2,1\}$  $\{1,1,1\}$ 

$n = 4$ $\{4\}$  $\{3,1\}$  $\{2,2\}$  $\{2,1,1\}$  $\{1,1,1,1\}$ 

↓ Nombre de colonnes décroissant de haut en bas.

Tableau de Young Obtenu à partir d'un diagramme en le remplissant avec des nombres.

ex: $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$

Tableau normal : Nombres dans l'ordre gauche à droite et haut en bas.

Standard " " croissant "

" "

Normal $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$ Standard $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$

Il y a une action naturelle de S_n sur les tableaux en permutant les indices.

Θ_λ tableau rond associé au diagramme λ.

$\Theta_\lambda^p := p\,\Theta_\lambda$.

Symétriseur $\quad s_\lambda^p = \sum_h h_\lambda^p$

↳ Permutations qui laissent invariantes les lignes

Antisymétriseur $\quad a_\lambda^p = \sum_v (-1)^{v_\lambda} v_\lambda^p$

$$e_\lambda^p = s_\lambda^p a_\lambda^p = \sum_{h,v} (-1)^{v_\lambda} h_\lambda^p v_\lambda^p$$

<u>Th</u> Les e_λ^p sont les idempotents primitifs qu'on a introduits précédemment avec λ des tableaux standards.

<u>Ex détaillé sur S_3</u>

Tableaux standards

Θ_1 $\boxed{1|2|3}$ $\quad e_1 = s = 1/6\left(e + (12) + (23) + (31) + (123) + (321)\right)$

Θ_2 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad e_2 = \frac{1}{3}\left(e + (12)\right)\left(e - (13)\right) = \frac{1}{3}\left(e + (12) - (13) - (132)\right)$

$\Theta_2^{(23)}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad e_2^{(23)} = \frac{1}{3}\left(e + (13)\right)\left(e - (12)\right) = \frac{1}{3}\left(e + (13) - (12) - (123)\right)$

Θ_3 $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$ $\quad e_3 = \frac{1}{6}\left(e - (12) - (23) - (31) + (123) + (321)\right)$

① Rep triviale $\quad (12)\,e_1 = e$

③ Rep signe $\quad (12)\,e_3 = 1/6\left((12) - e - (123) - (321) + (13) + (23)\right)$

$= -e_3$

②

$$e_2 = \frac{1}{3}(e+(12)-(13)-(132))$$

$e\,e_2 = e_2$

$(12)e_2 = \frac{1}{3}((12)+e-(132)-(13))$

$= e_2$

$(23)e_2 = \frac{1}{3}((23)+(321)-(123)-(12)) := \pi_2$

$(31)e_2 = \frac{1}{3}((31)+(123)-e-(23)) = -e_2-\pi_2$

$(123)e_2 = \frac{1}{3}((123)+(31)-(23)-e) = -e_2-\pi_2$

$(321)e_2 = \frac{1}{3}((321)+(23)-(12)-(123)) = \pi_2$

↳ on a bien un sous-ensemble fermé par action du groupe

Dans ce sous-espace on peut prendre la base $\{e_2, \pi_2\}$

$(12) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(23)\pi_2 = (23)\pi_2 = e_2 \qquad (23) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(13)\pi_2 = (13)(23)e_2 = (213)e_2 = \pi_2$

$(13) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(123)\pi_2 = (123)(23)e_2 = (12)e_2 = e_2$

$(123) \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(321)\pi_2 = (321)(23)e_2 = (13)e_2 = -e_2-\pi_2$

$(321) \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(12)(23) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (123).$

$(12)(321) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (13)$

1 rep irréductible de dim 2.
+1 autre rep équivalente

Rép régulière triviale $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} & & \\ & & (\ \ ) & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Blocs 2x2

signe.

Décomposition de l'identité

$$e = \frac{1}{6} e_1 + \frac{1}{3}\left(e_2 + e_2^{(23)}\right) + \frac{1}{6} e_3$$

IV) Décomposition de tenseurs.

V_m m dimensional vector space.

$GL(m, \mathbb{C})$ transfo inversibles.

On fixe une rep irréductible matricielle sur cet espace.

$$g\,|i\rangle = |j\rangle g^{j}{}_{i}$$

"$U(g)$"

Transfo sur les composants.

$$g\,|x\rangle = g\,|j\rangle x^{j} = g^{l}{}_{j}\,|l\rangle x^{j}$$

$$x_g{}^{l} := (g\ x)^{l} = g^{l}{}_{j} x^{j}.$$

Espace tensoriel $\quad V_m^n = V_m \times \cdots V_m$, n copies.

Base $\quad |i_1 \cdots i_n\rangle = |i_1\rangle \cdots |i_n\rangle$

$$|x\rangle = |i_1 \cdots i_n\rangle x^{i_1 \cdots i_n} / \{i\}$$

$$D(g)^{\{j\}}{}_{\{i\}} = g^{j_1}{}_{i_1} \cdots g^{j_n}{}_{i_n}$$

$$x_g^{\{j\}} = g^{j_1 \cdots j_n}_{i_1 \cdots i_n}\, x^{i_1 \cdots i_n} =: g^{\{j\}}{}_{\{i\}}\, x^{\{i\}}$$

Natural rep of the linear group :

$$|x_p\rangle := p|x\rangle$$

$$x_p^{\,i_1\cdots i_n} = x^{\,i_{p_1}\cdots i_{p_n}}$$

$$p|i_1\cdots i_n\rangle = |i_{p_1^{-1}}\cdots i_{p_n^{-1}}\rangle$$

$$=: |j\rangle_n D(p)^{\{j\}}{}_{\{i\}}.$$

$$D(p)^{\{j\}}{}_{\{i\}} = \delta^{j_1}{}_{i_{p^{-1}_1}}\cdots\delta^{j_n}{}_{i_{p^{-1}_n}} = \delta^{j_{p_1}}_{i_1}\cdots\delta^{j_{p_n}}_{i_n}.$$

$$m := p^{-1}n \rightarrow pm = n$$

<u>Th</u> : Les 2 ensembles $\{D(p), p\in S_n\}$ $\{D(g), g\in G_m\}$ commutent.

<u>Preuve</u> $pg|i\rangle_n = p|j\rangle_n D(g)^{\{j\}}{}_{\{i\}} = |j_{p^{-1}}\rangle_n D(g)^{\{j\}}{}_{\{i\}}$

$$= |j\rangle D(g)^{\{j_p\}}{}_{\{i\}}.$$

$$gp|i\rangle_n = g|i_{p^{-1}}\rangle_n = |j\rangle_n D(g)^{\{j\}}{}_{\{i_{p^{-1}}\}}$$

$$= |j\rangle_n D(g)^{\{j_p\}}{}_{\{i\}}.$$

Structure générale

$|\alpha\rangle \in V_m^n$.

$r\in L_\lambda$ $\quad r|\alpha\rangle$ génère un sous-espace stable par action de S_n.

$g\, e_\lambda^p |\alpha\rangle$ " " " G_m

↳ Vecteurs propres ont la forme

$$|\lambda, \alpha, a\rangle$$

Sous-espace de S_n ↗ ↖ sous-espace de G_m

Déf l'ensemble $\pi e_\lambda |\alpha\rangle$ $\pi \in \tilde{S}_n$ définit la classe de symétrie λ. On l'appelle $T_\lambda(\alpha)$

$T_\lambda(\alpha)$ espace invariant irréductible sous action $\tilde{S}_n$

<u>ex:</u> $m=2$ $n=3$ Base de V_2 $|+\rangle$ $|-\rangle$

espace entièrement symétrique (rep triviale de S_3) $\Theta_\lambda = \boxed{1|2|3}$

$e_s = 1/6\,(e + (12) + (13) + (32) + (123) + (321))$

Gm
$$\begin{aligned}
&|\alpha\rangle = |+++\rangle \quad & e_s|\alpha\rangle &= |+++\rangle & &:= |s,1,1\rangle \\
&|\alpha\rangle = |++-\rangle \quad & e_s|\alpha\rangle &= \tfrac{1}{3}(|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle) & &:= |s,2,1\rangle \\
&\vdots \quad |--+\rangle & & \tfrac{1}{3}(|--+\rangle + |-+-\rangle + |+--\rangle) & &:= |s\,3\,1\rangle \\
&\vdots \quad |---\rangle & & |---\rangle & & |s,4,1\rangle.
\end{aligned}$$

Rep $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline\end{array}$ $\rightarrow$ tous les éléments nuls $\rightarrow$ principe d'exclusion

pour $n=2$ on peut avoir $\frac{1}{2}(|ij\rangle - |ji\rangle)$

Rep mixte $\Theta\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $e_\lambda = \frac{1}{3}(e+(12))(e-(13))$

$e_\lambda |+++\rangle = 0$

$$\begin{aligned}
e_\lambda |++-\rangle &= \frac{1}{3}(e+(12))(|++-\rangle - |-++\rangle) \\
&= 1/3\,(|++-\rangle - |-++\rangle + |++-\rangle - |+-+\rangle) \\
&= 1/3\,(2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) \quad := |m,1,1\rangle.
\end{aligned}$$

$(23)\,e_m|\alpha\rangle = 1/3\,(2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) := |m,1,2\rangle$

T_λ^1

ex $|--+\rangle = \frac{1}{3}\left(2|--+\rangle - |+--\rangle - |-+-\rangle\right) := |m, 2, 1\rangle$

(23) ex $|--+\rangle = \frac{1}{3}\left(2|-+-\rangle - |+--\rangle - |--+\rangle\right) := |m, 2, 2\rangle$

T_λ^2

$$\left.\begin{matrix}|m\,1\,1\rangle \\ |m\,1\,2\rangle\end{matrix}\right\} T_\lambda(1) \qquad \left.\begin{matrix}|m\,2\,1\rangle \\ |m\,2\,2\rangle\end{matrix}\right\} T_\lambda(2)$$

$$\left.\begin{matrix}|m\,1,1\rangle \\ |m,2,1\rangle\end{matrix}\right\} T'_\lambda(1) \qquad \left.\begin{matrix}|m\,1\,2\rangle \\ |m\,2\,1\rangle\end{matrix}\right\} T'_\lambda(2)$$

<u>Th</u> Si $g \in G_m$ et $|\lambda, \alpha, a\rangle$ base définie précédemment

générée par G_m générée par S_n

Sous-espace $|\lambda, \alpha, a\rangle$ à λ, a fixé invariant sous action de G_m et ces qui sont irréductibles.