Chaos dissipatif

Les Gustins 2025

Notes préparatoires

Grégoire Le Lay

Dans ce document : notes succinctes autour de l'exposé sur le chaos. Possiblement des raccourcis, peu de rigueur, des coquilles... Le but est de fournir une idée générale pour se rappeler des points de l'exposé. Pour aller plus loin et faire les choses plus sérieusement, quelques refs que je recommande :

— Monographies : Bergé, Pomeau et Vidal 1988 ; Mullin 1995, d'autres que j'oublie

— Cours : Strogatz 2015 ; Croquette 2025

— Perspective historique : Duhem 1906 (visionnaire, sauf quelques points de vue vieillis), Petitgirard 2004, travaux de Sara Franceschelli

— Système de Lorenz : Lorenz 1963 (article séminal), Malkus 1972 (difficile a trouver), Matson 2007 (perspective alternative)

— Autres : Laskar 2010 (système solaire), Bourgade et Keating 2010 (chaos quantique).

1 Notion de chaos déterministe dissipatif

Idée : en physique pour comprendre (prédire) quelque chose il faut la définir, puis

(i) modéliser mathématiquement

(ii) Recueillir des données

(iii) Calculer le résultat

et enfin comparer ça au résultat d'une expérience.

Pendant longtemps le point (i) a bloqué (manque d'outil mathématique pour décrire les choses avec précision). On a aussi eu du mal avec le point (ii) (par ex, définition de la température). Enfin, quand on a eu des modèles puissants on a manqué de moyens pour calculer (avant les ordinateurs).

Quand on a tout eu : on s'est rendu compte que parfois, la structure mathématique même des modèles faisait en sorte que, même lorsque aucun bruit n'est présent (déterminisme), la prédiction est impossible... C'est le chaos.

1.1 Historique

Fin XIXe : les précurseurs, ensuite oubliés

— Hadamard fin XIXe : trouve une structure mathématique (géodésiques de surfaces à courbure négative) sensible aux conditions initiales

— Duhem fin XIXe - début XXe : Comprend que certains modèles physiques ne peuvent mener à des prédictions à cause de cela

— Poincaré début XXe : Comprend que le problème à trois corps n'est peut-être pas prédictible. N'en tire pas de conséquence forte.

— Lorenz 1963 : Trouve un système d'équations reliées à un système physique qui est explicitement chaotique.

1.2 Chaos : tentative de définition

Il n'existe pas de définition générale, ça dépend un peu du système, mais les ingrédients généraux sont (Strogatz 2015) :

— Déterministe, i.e. non-stochastique (pas de hasard dans la modélisation)

— Apériodique, i.e. pas de point fixe, de cycle attracteur, pas de quasipériodicité. (rq1 : cel exclut les systèmes continues de dimensions $d < 2$ (Thm de Poincaré-Bendixon)) (rq2 : cela exclut les systèmes qui divergent, style $\dot{x} = x$)

— Sensibilité aux Conditions Initiales (SCI) : plus grand exposant de Lyapunov > 1

Il y a aussi de chaos quantique, je n'en parle pas ici.

1.3 Routes vers le chaos

Plusieurs routes vers le chaos identifiées. Ici j'en cite trois :

— Cascade de doublement de période (suite logistique, constante de Feigenbaum, ordering de???)

— Intermittence (tye I et III surtout)

— 3 bifurcations de Hopf (scénario de Ruelle et Takens) -> discussion ruelle takens newsome VS landau-levich

1.4 Systèmes chaotiques

1.4.1 Systèmes à temps discrets

Systèmes itérés. Exemples :

— Suites itérées (suite logistique, application tente, suite de Hénon)

— Applications du tore sur lui-même (transformation du boulanger, du chat)

1.4.2 Systèmes continus conservatifs

Chaos hamiltoniens. Énergie conservée (pas de dissipation, pas d'injection). Nombre de dimensions pair, aire (volume) dans l'espace des phases conservée. On a plein de théorèmes mathématiques puissants là-dessus (théorème KAM).

Exemples :

— Double pendule

— Problème à 3 (N) corps

— Problèmes types billards (billard de Sinaï)

1.4.3 Systèmes continus dissipatifs

Chaos dissipatif. Énergie pas conservée (dissipation compensée en moyenne par injection d'énergie). Espace des phases peut être en dimension 3 donc visualisable.

Exemples :

— Oscillateur non-linéaire forcé en temps : pendule, Duffing (double puits), Van der Pol

— Systèmes 3D : Lorenz, Rössler

— Mécanique des fluides : Rayleigh-Bénard, Taylor-Couette (B-Z en chimie)

2 Le système de Lorenz et une roue à eau

2.1 Obtention des équations

On considère une roue avec de l'eau. Pour la dérivation précise, se référer à Strogatz 2015 et à Matson 2007.

La masse totale converge : on a

$$\dot{M} = Q_{\text{tot}} - \kappa M \tag{1}$$

$$\text{d'où} \quad M(t \to \infty) = Q_{\text{tot}}/\kappa \tag{2}$$

On peut donc éliminer les variations temporelles de masse en se plaçant en régime établi.

Grosso moddo on a deux équations intégro-différentielles pour la densité angulaire de masse m et la vitesse de rotation ω

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - \kappa m - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \tag{3}$$

$$J\dot{\omega} = -\nu\omega + \int_{(2\pi)} m(\theta, t) R g \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \tag{4}$$

avec $g = g_0 \sin\phi$ où ϕ est l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale, $Q(\theta)$ l'injection de masse par unité d'angle et de temps, κ le taux de vidange, ν le taux de frottement, J le moment d'inertie total, etc.

On peut résoudre ça en décomposant m en série de Fourier en θ. Dans cette décomposition, le terme proportionnel à $\cos\theta$ correspond (à un facteur près) à la position verticale du centre de masse, tandis que le terme proportionnel à $\sin\theta$ correspond à la position horizontale. Ces termes sont couplés entre eux et la vitesse de rotation, les harmoniques de plus haut rang n'ont pas d'importance dans la dynamique.

Au final, on obtient le système suivant :

$$\dot{W} = -\sigma W + \sigma X \tag{5}$$

$$\dot{X} = -X + WY \tag{6}$$

$$\dot{Y} = -Y - WX + \rho \tag{7}$$

où σ et ρ sont des constantes sans dimensions. Par analogie avec le système de Rayleigh-Bénard, on parle de nombre de Prandtl pour σ, qui compare deux modalités de dissipation entre elles, et de nombre de Rayleigh pour ρ, qui compare les causes du mouvement (« advection ») à la dissipation.

On obtient précisément le système de Lorenz, à deux différences près : le point fixe n'est pas en $(0,0,0)$, ce qui chagrine les mathématiciens mais qui permet d'avoir uniquement des termes porteurs de sens, et le paramètre b du système de Lorenz vaut 1, ce qui rend compte du fait que l'on s'intéresse « rouleau de convection » contraint.

2.2 Comportement du système

On a un point fixe en $(0,0,\rho)$: la roue est immmobile. Une analyse de stabilité linéaire nous apprend que ce point est stable lorsque $\rho < 1$ (on peut montrer facilement que dans ce cas toute la dynamique y converge) et instable sinon. Au delà de $rho = 1$, un couple de points fixes apparaît $(\pm\sqrt{\rho - 1}, \pm\sqrt{\rho - 1}, 1)$. On a donc une bifurcation en fourche supercritique. Ces points fixes deviennent aux-même instables au bout d'une certaine valeur de ρ qui dépend de σ. Que se passe-t-il alors ? On montre qu'il n'y a pas de points fixes ni de cycle limites. La dynamique diverge-t-elle, s'en va-t-elle à l'infini ? Non. On sait par ailleurs qu'elle se contracte : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{x} < 0$. Discussion de tout ça…

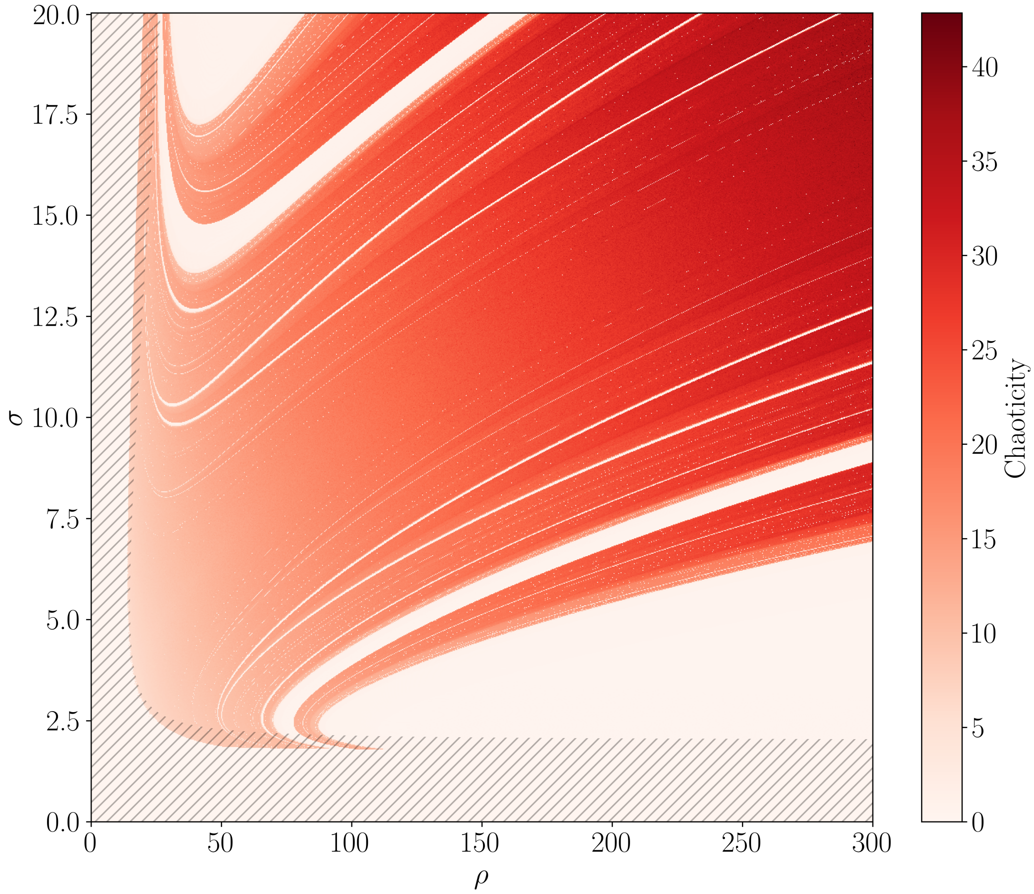

FIGURE 1 – Régimes de fonctionnement. Les régimes périodiques sont en blanc. Cette carte a une structure fractale.

Autres points : dilatation et pliage (stretching and folding), dimension fractale de l'attracteur, retournement dans les sections de Poincaré…

Bibliographie

Bergé, P., Y. Pomeau et C. Vidal (1988). *L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence*. Paris : Hermann. 352 p.

Bourgade, P. et J. P. Keating (2010). « Quantum Chaos, Random Matrix Theory, and the Riemann ζ-Function ». Séminaire Poincaré. URL : https://seminaire-poincare.pages.math.cnrs.fr/juin2010.html.

Croquette, V. (2025). *Cours de Vincent Croquette*. Département de Physique de l'Ecole Normale supérieure. URL : https://www.phys.ens.fr/fr/article/cours-de-vincent-croquette (visité le 02/08/2025).

Duhem, P. (1906). *La théorie physique. Son objet, sa structure*.

Laskar, J. (2010). « Le Système Solaire Est-Il Stable ? » Séminaire Poincaré. URL : https://seminaire-poincare.pages.math.cnrs.fr/juin2010.html.

Lorenz, E. N. (1963). « Deterministic Nonperiodic Flow ». *Journal of the Atmospheric Sciences*. DOI : 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.

Malkus, W. V. R. (1972). « Non-Periodic Convection at High and Low Prandtl Number ». *Mem. Societe Royale des Sciences de Liege*. 6^{e} sér.

Matson, L. E. (2007). « The Malkus–Lorenz Water Wheel Revisited ». *American Journal of Physics*. DOI : 10.1119/1.2785209.

Mullin, T. (1995). *The Nature of Chaos*. Oxford : Clarendon Press. 337 p.

Petitgirard, L. (2004). « Le Chaos : Des Questions Théoriques Aux Enjeux Sociaux : Philosophie, Épistémologie, Histoire et Impact Sur Les Institutions : (1880-2000) ». These de doctorat. Lyon 2. URL : https://theses.fr/2004LYO20093.

Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC. 616 p.