

LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

MARC ABOUD
LES GUSTINS 2026

Ceci sont des notes de l'exposé que j'ai donné aux Gustins 2026. Le but est de prouver le théorème suivant.

Théorème 0.1 (Banach-Tarski). *Soit B la boule unité dans $\mathbf{R}^3$, il existe un découpage de B en un nombre fini de parties disjointes qui peuvent être recollées de sorte qu'on puisse obtenir deux boules disjointes B_1, B_2 de même volume que B .*

À priori cela viole les principes de la physique car nous avons créé de la matière. En effet l'énoncé donne un découpage

$$B = E_1 \sqcup E_2 \cdots \sqcup E_n. \quad (1)$$

Et il existe des isométries g_i de sorte que

$$B = g_1(E_1) \sqcup g_2(E_2) \sqcup \cdots \sqcup g_s(E_s) = g_{s+1}(E_{s+1}) \sqcup \cdots \sqcup g_m(E_m). \quad (2)$$

Mais alors comme les isométries préservent le volume on a

$$\text{vol}(B) = \text{vol}(E_1) + \cdots + \text{vol}(E_s) = \text{vol}(E_{s+1}) + \cdots + \text{vol}(E_m) = \text{vol}(E_1) + \cdots + \text{vol}(E_m) = 2 \text{vol}(B). \quad (3)$$

Cela donne alors $\text{vol}(B) = 0$ ce qui est absurde. Voici pourquoi ce résultat est appelé "paradoxe". En fait il n'en est rien, l'erreur qui a été faite ici est qu'on a utilisé le volume des parties E_i . En fait ces parties ne sont pas *mesurables* et on ne peut pas définir leur volume. Les égalités que nous avons écrites ne sont pas valables.

La démonstration de ce théorème repose sur pas mal de mathématiques différentes. On parlera de la notion de dénombrabilité, de groupe, de mesure et de l'axiome du choix.

1. DÉNOMBRABILITÉ

Soit A un ensemble, on dit que A est *dénombrable* si on peut lister tous les éléments de A dans une suite. Plus précisément, il existe une *bijection* $\phi : \mathbf{N} \rightarrow A$. C'est à dire qu'il existe $\psi : A \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\phi \circ \psi = \text{id}_A$, $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbf{N}}$.

Proposition 1.1. *Toute sous-partie infinie $A \subset \mathbf{N}$ est dénombrable.*

Démonstration. On construit une suite (u_n) qui va énumérer tous les éléments de A par récurrence. On pose $u_0 = \min(A)$. Puis supposons avoir défini $u_0 < \cdots < u_n$ avec $u_i \in A$, alors on définit $u_{n+1} =$

$\min A \setminus \{u_0, \dots, u_n\}$. La suite (u_n) ainsi construite est strictement croissante. De plus tout élément de A est dans cette suite, en effet soit $a \in A$ et soit

$$k = \text{Card} \{a' \in A : a' < a\} \quad (4)$$

alors $u_k = a$. □

Cette proposition dit que tout ensemble infini qui possède une injection vers $\mathbf{N}$ est en fait dénombrable.

Corollaire 1.2. *Soit A un ensemble infini et B un ensemble dénombrable. S'il existe une injection $\phi : A \hookrightarrow B$, alors A est dénombrable.*

Une fonction $\phi : A \rightarrow B$ est *injective* si pour tout $a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow \phi(a) \neq \phi(a')$. On peut montrer que si ϕ est injective, alors c'est une bijection entre A et $\phi(A)$.

Théorème 1.3. *Une union dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable. Un produit fini d'ensemble dénombrables est dénombrables.*

Démonstration. Pour les produits finis, il suffit de démontrer que pour tout $d \geq 1, \mathbf{N}^d$ est dénombrable. Soient $p_1, \dots, p_d$ des nombres premiers distincts, on a une injection

$$(n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d \rightarrow p_1^{n_1} \cdots p_d^{n_d} \in \mathbf{N}^d. \quad (5)$$

Soit $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une collection d'ensembles dénombrables et soit $\phi_i : A_i \rightarrow \mathbf{N}$ une bijection. On définit une injection $\phi : \bigcup_i A_i \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de la façon suivante : soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, soit

$$i_0(x) = \min \{i \in \mathbf{N} : x \in A_i\}. \quad (6)$$

On définit alors

$$\phi(x) := (i_0, \phi_{i_0}(x)). \quad (7)$$

On a bien que ϕ est injective. □

Corollaire 1.4. *$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ sont dénombrables.*

Démonstration. Pour $\mathbf{Z}$ on donne deux preuves.

- (1) Pour tout $m \in \mathbf{Z}$ on définit $\varepsilon(m) \in \{0, 1\}$ avec $\varepsilon(m) = 1$ si $m < 0$ et 0 sinon. On définit une injection $\phi : \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{N}$ par

$$\phi(m) = 2^{\varepsilon(m)} 3^{|m|}. \quad (8)$$

Cela donne bien une injection.

- (2) On peut construire une bijection de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{N}$ à la main. Si $n \in \mathbf{Z}$ on définit

$$\phi(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2|n| + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Pour $\mathbf{Q}$, on sait que tout élément $x \in \mathbf{Q}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = (\pm 1) \frac{a}{b} \quad (10)$$

avec $a, b \in \mathbf{N}$, $b > 0$ et a et b premiers entre eux. On a alors une injection $\phi : \mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnée par

$$\phi(x) = (\varepsilon(x), a, b). \quad (11)$$

Donc $\mathbf{Q}$ est dénombrable. □

Théorème 1.5 (La diagonale de Cantor). *L'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. C'est l'argument de la diagonale de Cantor. On va montrer que le segment $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Pour cela on utilise le fait que tout nombre réel entre 0 et 1 admet une unique écriture décimale. En effet, soit $x \in [0, 1[$ il existe une unique suite $(x_i)_{i \geq 1}$ avec $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ telle que x_i n'est pas stationnaire égale à 9 et

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}. \quad (12)$$

Ce qu'on écrit habituellement

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_i \dots \quad (13)$$

Réciproquement, n'importe quelle suite qui n'est pas stationnaire à 9 donne un unique réel $x \in [0, 1[$ et ces deux procédés sont inverses l'un de l'autre.

Supposons que $[0, 1[$ soit dénombrable. Alors on peut énumérer les éléments du segment par une suite $(x^k)_{k \geq 1}$. On va construire un réel $y \in [0, 1[$ en donnant son écriture décimale et on va prouver qu'il ne peut pas appartenir à la suite. Soit $k \geq 1$, on définit y_k par

$$y_k := x_k^k + 1 \bmod 10. \quad (14)$$

Si la suite (y_k) est stationnaire égale à 9, on choisit un rang n_0 à partir duquel la suite est constante égale à 9 et on pose $y_n = 1$ pour $n \geq n_0$, notons que $y_n \neq x_n^n = 8$.

Le nombre réel $y = \sum_{i \geq 1} \frac{y_i}{10^i}$ ne figure pas dans la suite (x^k) en effet pour tout $k \geq 1$ on a

$$x_k^k \neq y_k. \quad (15)$$

C'est une contradiction. □

Ce résultat est assez frappant car on sait que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$: on peut approcher n'importe quel réel de façon arbitrairement proche par un rationnel, mais il y a infiniment moins de rationnels que de réels.

2. L'AXIOME DU CHOIX

L'axiome du choix est un axiome indécidable qui énonce le fait suivant :

Soit X un ensemble, alors il existe une fonction de choix. C'est à dire qu'il existe une fonction $s : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $s(A) \in A$.

Son indécidabilité a été prouvée par Godel et Cohen dans [Göd38, Coh63]. Le défaut de l'utilisation de l'axiome du choix et qu'on obtient un objet non constructible, il n'y a priori aucun contrôle sur l'objet fourni par l'axiome du choix. Nous verrons son utilité pour trouver un système de représentant pour une action de groupe.

3. THÉORIE DE LA MESURE

Soit X un ensemble, une tribu $\mathcal{T}$ sur X est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, les parties de X tel que

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (2) $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire : $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{T}$.
- (3) $\mathcal{T}$ est stable par union et intersection dénombrable (et finie) si $A_i \in \mathcal{T}, i \in \mathbf{N}$, alors

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i, \bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i \in \mathcal{T} \quad (16)$$

Supposons X munie d'une tribu, alors on dit que $A \subset X$ est *mesurable* si $A \in \mathcal{T}$. Si $X = \mathbf{R}^n$, la tribu des *boréliens* est la plus petite tribu sur $\mathbf{R}^n$ qui contient toutes les boules ouvertes.

Une *mesure* sur $(X, \mathcal{T})$ est une fonction $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ telle que

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (2) Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ 2 à 2 disjointes, alors

$$\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n). \quad (17)$$

On peut déduire les propriétés suivantes pour une mesure.

- (1) Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (2) Si (A_n) est une suite d'ensembles mesurables, alors $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
- (3) Si $A \subset B$, $\mu(A) = \mu(B) + \mu(B \setminus A)$.

Exemple 3.1. Si $X = \mathbf{N}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$, alors on définit la mesure de comptage

$$m(A) = \text{Card}(A). \quad (18)$$

L'exemple principal sur $\mathbf{R}^n$ munie de la tribu des Boréliens est évidemment la *mesure de Lebesgue*, elle est définie de la façon suivante : Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels tels que $x_i \leq y_i$, alors

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^n [x_i, y_i]\right) = \prod_{i=1}^n (y_i - x_i). \quad (19)$$

Si $n = 3$ et $A \subset \mathbf{R}^3$ est mesurable, alors $\lambda(A)$ est le *volume* de A . On voit donc que pour définir le volume d'une partie, il faut qu'elle soit *mesurable*, c'est à dire qu'elle appartient à la tribu des Boréliens. Ce n'est pas à priori garanti. Une fonction $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est dite *mesurable* si pour toute partie mesurable $B \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $f^{-1}(B) \subset \mathbf{R}^n$ est mesurable. La théorie de la mesure de Lebesgue permet d'intégrer toute fonction mesurable contre une mesure.

4. UN PEU DE VOCABULAIRE

Soit X un ensemble, une *partition de X* est la donnée de sous-ensemble $A_i \subset X$ 2 à 2 disjoints tels que

$$X = \bigsqcup_{i \in I} A_i. \quad (20)$$

On dit qu'une partition est finie si le nombre de A_i est fini.

On dit que X est *dédoublable* par m morceaux sous l'action d'un groupe G s'il existe une partition $A_1, \dots, A_m$ de X et des éléments $g_i \in G$ et un entier $1 < s < m$ tels que

$$X = g_1(A_1) \sqcup g_2(A_2) \sqcup \dots \sqcup g_s(A_s) = g_{s+1}(A_{s+1}) \sqcup \dots \sqcup g_m(A_m). \quad (21)$$

On dit que deux ensembles X, Y sont *équidécomposables* avec n morceaux s'il existe une partition $A_1, \dots, A_n$ de X et des éléments $g_i \in G$ telle que $g_i(A_i)$ soit une partition de Y .

Proposition 4.1. *Si X est dédoublable par m morceaux et X et Y sont équidécomposables avec n morceaux alors Y est dédoublable par mn morceaux.*

Démonstration. Soit $B_1, \dots, B_m$ une partition de X et $h_i \in G$, $1 \leq i \leq m$ satisfaisant la définition de dédoublabilité et soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de X et $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que $g_i(A_i)$ soit une partition de Y . On va transporter la décomposition de X vers Y . Notons

$$C_{i,j} = A_i \cap B_j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (22)$$

On a que

$$D_{i,j} := g_j(C_{i,j}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad (23)$$

est une partition de Y . Et de plus pour l'entier s qui réalise le dédoublement de X on a pour tout $j = 1, \dots, n$

$$B_j = h_1(A_1 \cap B_j) \sqcup h_2(A_2 \cap B_j) \sqcup \dots \sqcup h_s(A_s \cap B_j) = h_{s+1}(A_{s+1} \cap B_j) \sqcup \dots \sqcup h_m(A_m \cap B_j). \quad (24)$$

Et donc

$$Y = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} h_i g_j^{-1}(D_{i,j}) = \bigsqcup_{\substack{s+1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} h_i g_j^{-1}(D_{i,j}) \quad (25)$$

On a donc bien que Y est dédoublable par mn morceaux. □

5. LE GROUPE D'ISOMÉTRIES DE $\mathbf{R}^3$

Une isométrie de $\mathbf{R}^3$ est une application $\phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ qui préserve la distance euclidienne. On peut montrer qu'une isométrie qui fixe l'origine est forcément une application linéaire et donc correspond à une matrice du groupe orthogonal

$$O_3(\mathbf{R}) = \{M \in GL_3(\mathbf{R}) : {}^tMM = \text{id}\}. \quad (26)$$

Une telle matrice satisfait $(\det M)^2 = 1$ et donc $\det M = \pm 1$. Le groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbf{R})$ est le sous-groupe dont les matrices sont de déterminant 1 c'est celle qui préserve l'orientation. Maintenant si ϕ est une isométrie qui ne fixe pas l'origine et $t_{\phi(O)}$ la translation par le vecteur $\phi(O)$, alors $t_{\phi(O)}^{-1}\phi$ est une isométrie qui préserve l'origine donc elle provient d'une matrice orthogonale M et alors

$$\phi = t_{\phi(O)}M. \quad (27)$$

Il y a plusieurs types d'isométries.

- (1) Les translations.
- (2) Les rotations : elles fixent une droite L point par point et agissent par rotation d'angle θ sur l'orthogonal de L .
- (3) Les symétries axiales : elles fixent un plan P point par point et agissent comme $-\text{id}$ sur la droite orthogonale à P .
- (4) Les symétries par rapport à un point. Elle fixe un unique point et sont conjuguées à $-\text{id}$.

Tout isométrie est un produit de ces 4 types d'isométries et en fait les 3 premières suffisent car une symétrie par rapport à un point p est la composée de la symétrie axiale par rapport à un plan P passant par p et de la rotation d'angle π d'axe la droite orthogonale à P .

Proposition 5.1. *Toute matrice $M \in SO_3(\mathbf{R})$ est une rotation.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique χ_M de M est un polynôme unitaire à coefficients réels, il possède donc au moins une racine réelle λ . On a donc qu'il existe un vecteur non-nul v tel que $M(v) = \lambda v$ et comme M préserve la norme euclidienne cela donne $\lambda = \pm 1$. Si les trois racines de χ_M sont réelles, alors elles valent ± 1 et leur produit vaut $1 = \det M$ donc il y en a au moins une égale à 1. Si χ_M a une racine réelle λ et deux racines complexes conjuguées $z, \bar{z}$, alors

$$1 = \det M = \lambda z \bar{z} = \pm |z|^2. \quad (28)$$

Ce qui force $\lambda = 1$. Donc il existe un vecteur $v \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $M(v) = v$, plus généralement la droite vectorielle portée par v est fixée point par point par M . Comme M préserve le produit scalaire, le plan P orthogonal à ℓ doit être stable par M . Donc $M|_P$ est une isométrie vectorielle de $\mathbf{R}^2$ qui préserve l'orientation. La matrice associée est alors de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (29)$$

C'est la matrice de la rotation d'angle θ . □

6. LE GROUPE LIBRE À DEUX GÉNÉRATEURS

6.1. Définition, générateurs et relations. Le groupe libre à deux générateurs F_2 est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. La multiplication est donnée par la concaténation de mots et les règles de simplification donnée par $aa^{-1} = bb^{-1} = a^{-1}a = b^{-1}b = \varepsilon$ où ε est le mot vide. Le mot vide ε est également le neutre pour la multiplication. On dit qu'un mot est sous *forme normale* s'il n'admet pas de simplification. C'est un groupe dans lequel il n'y a pas de *relations*. On peut de la même manière définir le groupe libre à r générateurs F_r sur l'alphabet $\{a_1, \dots, a_r\}$. Plus généralement, si X est un ensemble, on peut définir le groupe libre sur X par l'ensemble des mots écrit par l'alphabet donné par X (on peut noter qu'il n'y a aucune restriction sur la taille de X).

Exercice 6.1. Montrer que pour tout $r \geq 1$, F_r est dénombrable.

Les groupes libres sont caractérisés par la propriété universelle suivante :

Soit G un groupe, pour obtenir un morphisme $\phi : F_r \rightarrow G$ il faut et il suffit de donner $\phi(a_1), \dots, \phi(a_r)$. Si G est engendré par r éléments $g_1, \dots, g_r$, alors on construit un morphisme surjectif $\phi : F_r \twoheadrightarrow G$ par $\phi(a_i) = g_i$. Soit R le noyau de ce morphisme, on dit que R est le *groupe des relations* de G . En effet, un mot de R est trivial dans G . On dit que G est de *présentation finie* si R est de type fini, c'est à dire engendré par un nombre fini d'éléments. Si $\omega_i \in R$ est un ensemble de générateurs de R on note souvent

$$G = \langle a_1, \dots, a_r | \omega_i, i \in I \rangle. \quad (30)$$

Exemple 6.2. Le groupe $\mathbf{Z}^2$ est donné par

$$\langle a, b | ab = ba \rangle. \quad (31)$$

En effet, $\mathbf{Z}^2$ est engendré par $(0, 1)$ et $(1, 0)$ et la seule relation est que ces générateurs commutent.

Définition 6.3 (Groupe homophone). Prenons l'alphabet à 26 lettres classique et prenons le groupe libre associé F_{26} . Le groupe homophone associé à une langue est le quotient de F_{26} par les relations homophones, c'est à dire deux mots différents qui ont la même phonétique.

Théorème 6.4 ([MSWZ93]). *Le groupe homophone associé au français et à l'anglais sont triviaux.*

Donnons quelques idées de la preuve. Tout d'abord on a que *soi* = *soie* = *soit* = *sois*. En simplifiant à gauche par *soi* on voit que *e, t, s* sont triviaux dans le quotient. Puis on peut continuer, *quel* = *quelle* trivialise *l*, etc ..., je vous laisse trouver le reste.

6.2. Dédoublabilité de F_2 .

Proposition 6.5. *Le groupe F_2 est dédoublable pour sa propre action avec 4 morceaux. Plus précisément, il existe une partition en 4 parties de $F_2 = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup X_4$ telle que*

$$F_2 = X_1 \sqcup a^{-1}(X_2) = X_3 \sqcup b^{-1}(X_4). \quad (32)$$

Démonstration. Pour $u \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ on note $W(u)$ l'ensemble des mots réduits commençant par u . On a alors

$$F_2 = \{\varepsilon\} \sqcup W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}). \quad (33)$$

Et alors

$$F_2 = W(a^{-1}) \cup a^{-1}W(a) = W(b^{-1}) \cup b^{-1}W(b). \quad (34)$$

C'est presque ce qu'on veut mais ici le problème c'est qu'on a utilisé que 4 des 5 sous parties de la partition. On va donc modifier un peu notre découpage. Soit $\Lambda = \{a^n : n \geq 0\}$, on a

$$F_2 = W(a) \setminus \Lambda \sqcup (W(a^{-1}) \cup \Lambda) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}). \quad (35)$$

Rien ne change pour la partie avec les b et on a

$$F_2 = (W(a^{-1}) \cup \Lambda) \sqcup a^{-1}(W(a) \setminus \Lambda). \quad (36)$$

□

Théorème 6.6. Soit $G = \text{SO}_3(\mathbf{R})$ le groupe des isométries vectorielles directes de $\mathbf{R}^3$, alors il existe deux rotations α, β telle que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = F_2. \quad (37)$$

Démonstration. Soit $\theta = \arccos(1/3)$. On prend α la rotation autour de l'axe Oz d'angle θ et β la rotation d'angle θ autour de l'axe Ox . En terme de matrice cela donne

$$\alpha^{\pm 1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \pm 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta^{\pm 1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

On montre que α, β engendrent un groupe libre grâce au lemme du ping-pong. Plus précisément, on voit déjà que l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\left\{ \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z}, k \geq 0 \right\} \quad (39)$$

est invariant par $G := \langle \alpha, \beta \rangle$. On définit les ensembles

$$A_{\pm} = \left\{ \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} : 3|c, 3 \nmid b, a \equiv \pm b[3], n \geq 0 \right\}, \quad (40)$$

$$B_{\pm} = \left\{ \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} : 3|a, 3 \nmid b, c \equiv \pm b[3], n \geq 0 \right\} \quad (41)$$

Et on a

$$\alpha(U) \subset A_- \quad U \neq A_+ \quad (42)$$

$$\alpha^{-1}(U) \subset A_+ \quad U \neq A_- \quad (43)$$

$$\beta(U) \subset B_+ \quad U \neq B_- \quad (44)$$

$$\beta^{-1}(U) \subset B_- \quad U \neq B_+. \quad (45)$$

Par le lemme du ping-pong on a que $\langle \alpha, \beta \rangle = F_2$. Voir par exemple [dlH00]. $\square$

7. PREUVE DU THÉORÈME DE BANACH-TARSKI

La preuve se décompose en plusieurs étapes, on va d'abord dédoubler la sphère $\mathbb{S}^2$ privée d'une partie dénombrable, puis la sphère, puis la boule privée de l'origine et enfin toute la boule.

Soit $G = F_2 \subset \text{SO}_3(\mathbf{R})$ le groupe libre à deux générateurs que nous venons de construire, alors G agit sur la sphère $\mathbb{S}^2$. On note D l'ensemble des points fixes de l'action :

$$D = \{x \in \mathbb{S}^2 : g \in G \setminus \{\text{id}\} : g(x) = x\}. \quad (46)$$

Il est clair que G est dénombrable (exercice). Tout élément de $G \setminus \{\text{id}\}$ est une rotation d'angle irrationnel, qui a donc exactement 2 points fixes sur la sphère $\mathbb{S}^2$: les deux points d'intersections de son axe avec la sphère. On a donc que D est un ensemble dénombrable et donc $\mathbb{S}^2 \setminus D \neq \emptyset$. De plus, D est *totale*ment invariant sous l'action de G , c'est à dire que

$$G(D) = D \text{ et } G(\mathbb{S}^2 \setminus D) = \mathbb{S}^2 \setminus D. \quad (47)$$

En effet, soit $x \in D$, alors il existe $h \in G \setminus \{\text{id}\}$ tel que $h(x) = x$, soit $g \in G \setminus \{\text{id}\}$, montrons que $g(x) \in D$, si $g = h$, alors $h(h(x)) = x$ et donc $h(x) \in D$. Sinon

$$hg^{-1}(gx) = x \quad (48)$$

et $hg^{-1} \neq \text{id}$ donc $g(x) \in D$. Comme G est un groupe cela montre l'invariance totale.

Donc G agit sur $\mathbb{S}^2 \setminus D$ mais maintenant l'action est *libre* :

$$\forall g \in G \setminus \{\text{id}\}, \forall x \in \mathbb{S}^2 \setminus D, \quad g(x) \neq x. \quad (49)$$

Soient $x, y \in \mathbb{S}^2 \setminus D$, on dit que x et y sont *dans la même orbite* sous G s'il existe $g \in G$ tel que $g(x) = y$. Pour $x \in \mathbb{S}^2 \setminus D$ on note $O_G(x)$ l'ensemble des points dans la même orbite que x sous G . On a les propriétés suivantes

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^2 \setminus D, \quad O_G(x) \cap O_G(y) \neq \emptyset \Rightarrow O_G(x) = O_G(y) \quad (50)$$

et

$$X := \mathbb{S}^2 \setminus D = \bigcup_{x \in X} O_G(x). \quad (51)$$

Attention ici l'union n'est pas disjointe, il y a beaucoup de redondance. On dit que $\mathcal{R} \subset X$ est un *système de représentant* si pour tout $x, x' \in \mathcal{R}, x \neq x' \Rightarrow O_G(x) \cap O_G(x') = \emptyset$ et

$$X = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} O_G(x). \quad (52)$$

Le fait que X admet un système de représentant découle de l'axiome du choix. En effet, on a $X = \mathbb{S}^2 \setminus D$. Soit $s : \mathcal{P}(X) \rightarrow X = \mathbb{S}^2 \setminus D$ une fonction de choix et soit $O_{i \in I}$ l'ensemble des orbites, alors

$$\mathcal{R} = (s(O_i))_{i \in I} \quad (53)$$

est un système de représentants. On voit donc ici que $\mathcal{R}$ n'a aucune raison d'être mesurable car on utilise l'axiome du choix. En revanche on a le résultat suivant :

Proposition 7.1. *Pour tout $g, g' \in G, g \neq g'$,*

$$g(\mathcal{R}) \cap g'(\mathcal{R}) = \emptyset. \quad (54)$$

$$G(\mathcal{R}) = X. \quad (55)$$

Démonstration. La deuxième assertion découle du fait que $\mathcal{R}$ est un système de représentant. Pour la première assertion soit $r, r' \in \mathcal{R}$ tel que

$$g(r) = g'(r') \quad (56)$$

alors on a nécessairement que $r = r'$ car $\mathcal{R}$ est un système de représentant et alors on a

$$g'g^{-1}(r) = r \quad (57)$$

ce qui implique $g = g'$ car l'action de G sur X est libre. $\square$

Corollaire 7.2. *L'ensemble X est dédoublable sous l'action de G .*

Démonstration. On se rappelle que $G = \langle \alpha, \beta \rangle = F_2$ satisfait

$$G = W(\alpha^{-1}) \sqcup \alpha^{-1}(W(\alpha)) = W(\beta^{-1}) \sqcup \beta^{-1}(W(\beta)) \quad (58)$$

On a donc que

$$X = \mathcal{R} \sqcup W(\alpha) \cdot \mathcal{R} \sqcup W(\alpha^{-1}) \cdot \mathcal{R} \sqcup W(\beta) \cdot \mathcal{R} \sqcup W(\beta^{-1}) \cdot \mathcal{R} \quad (59)$$

et

$$X = W(\alpha^{-1}) \cdot \mathcal{R} \sqcup \alpha^{-1}(W(\alpha) \cdot \mathcal{R}) = W(\beta^{-1}) \cdot \mathcal{R} \sqcup \beta^{-1}(W(\beta) \cdot \mathcal{R}) \quad (60)$$

$\square$

On montre maintenant que $\mathbb{S}^2$ est également dédoublable.

Lemme 7.3. *Il existe une rotation $\rho \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$ d'ordre infini tel que les ensembles*

$$\rho^n(D), \quad n \geq 0 \quad (61)$$

soit 2 à 2 disjoints.

Démonstration. On peut tout d'abord trouver une droite ℓ passant par l'origine qui ne contient aucun point de D , en effet l'ensemble des droites vectorielles n'est pas dénombrable (exercice). Fixons une telle droite ℓ et soit ρ_θ la rotation qui fixe ℓ point par point et agit par rotation d'angle θ sur l'orthogonal de ℓ . Soient $x, y \in D$ et soit $n \in \mathbf{N}$ l'ensemble $W_{n,x,y}$ des angles $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\rho_\theta^n(x) = y \quad (62)$$

est fini de taille au plus n , en effet si θ est solution alors l'ensemble des angles solutions est donné par

$$\theta + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (63)$$

L'ensemble

$$W = \bigcup_{x,y \in D} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} W_{n,x,y} \quad (64)$$

est donc au plus dénombrable et on peut prendre $\rho := \rho_\theta$ avec $\theta \in [0, 2\pi] \setminus W$. $\square$

Corollaire 7.4. *Les ensembles $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^2 \setminus D$ sont équidécomposables par 2 morceaux. En particulier $\mathbb{S}^2$ est dédoublable avec 8 morceaux.*

Démonstration. Soit ρ la rotation provenant du lemme précédent. Soit $\tilde{D} = \bigsqcup_{n \geq 0} \rho^n(D)$. On a alors

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus \tilde{D} \sqcup \tilde{D} \quad (65)$$

et comme $\rho(\tilde{D}) = \tilde{D} \setminus D$ on a

$$\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{D} \sqcup \rho(\tilde{D}) = \mathbb{S}^2 \setminus D. \quad (66)$$

$\square$

On peut étendre cette décomposition à $B \setminus \{0\}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, on peut associer le segment $]O, x]$. L'action par SO_3 préserve tous ces segments. On obtient donc que $B \setminus \{0\}$ est dédoublable par 8 morceaux.

Dernière étape : il faut inclure l'origine. On fait le même procédé que pour récupérer D . Soit $p = (0, 0, 1/2)$ et soit r une rotation d'angle irrationnel dont l'axe est une droite passant par p mais qui ne contient pas O , alors la suite de points $(r^n(O))$ est une suite de points deux à deux distincts contenu dans B car ils appartiennent à la sphère centrée en p de rayon $1/2$. Soit E cette suite de point, alors $r(E) = E \setminus \{O\}$ et

$$B = B \setminus E \sqcup E \text{ et } B \setminus E \sqcup r(E) = B \setminus \{O\}. \quad (67)$$

On a donc que B est dédoublable sous l'action du groupe d'isométries de $\mathbf{R}^3$ par une partition en 16 éléments.

RÉFÉRENCES

- [Coh63] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6) :1143–1148, December 1963.
- [dlH00] Pierre de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, September 2000.
- [Göd38] Kurt Gödel. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12) :556–557, December 1938.
- [MSWZ93] Jean-François Mestre, René Schoof, Lawrence Washington, and Don Zagier. Quotients homophones des groupes libres (Homophonic quotients of free groups). *Experimental Mathematics*, 2(3) :153–155, January 1993.