

II - Effets de la rotation

1° Changement de référentiel

Formule de Bour
$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_A = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_R + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}_{\text{entraînement} = r\Omega \vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})}_{\substack{\text{entraînement} \\ -\Omega^2 r \vec{e}_r}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{r}}_{\substack{\text{Négligeable}}}$$

Des NS:
$$\left(\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)_A = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}_A$$

(...)

Des (R):
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\vec{g} - \Omega^2 r \vec{e}_r}_{\vec{g}_{app}} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^* - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Pression hydrostatique}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Coriolis}}$

2% Approximation Géostrophique

Nouvelle force = nouveau nombre sans dimension :

$$Ro = \frac{\|\vec{a}_r\|}{\|\vec{a}_c\|} = \frac{U^2/L}{\Omega U} = \frac{U}{\Omega L}$$

ODG Terre : $\Omega = 2\pi/1\text{jour} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
 $U = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Atmosphère : $L = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$ $Ro \approx 10^{-1} \rightarrow$ Coriolis prépondérant

Toilettes : $L = 10^{-2} \text{ m}$ $Ro = 10^6 \rightarrow$ Coriolis négligeable SLIDE

Approximation géostrophique $Ro \ll 1$, viscosité négligeable, stationnaire :

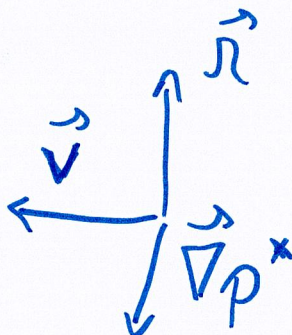
$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^* = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

Loi de Buys - Ballot

Trièdre direct :

dos au vent : dépression gauche
anticyclone droite } HN

Cyclones : sens trigo HN



Isobares // Vitesse

SLIDE

Projection $2\Omega \mapsto f = 2\Omega \cos \theta$

Théorème de Taylor - Proudman

$$\partial_z \vec{v} = \vec{0}$$

Structures 2D $\rightarrow$ colonnes de vorticité

Donc $\vec{\nabla}_\perp (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \vec{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$

$\Rightarrow$ Structures 2D2C $v_x(x,y)$
 $v_y(x,y)$

3º Ondas de Rossby (ondas inerciais)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^* - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

$$i\omega \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^* - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

$\downarrow \vec{\nabla} \wedge$

$$i\omega \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -c(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

→ Gen nouveau cyclotron

(Coriolis $\perp$ à vitesse)

Polarisation circulaire anticyclonique

$$\omega \vec{\nabla}^2 \vec{v} = -i\omega c (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

$$\omega^2 \nabla^2 \vec{v} = 4(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})^2 \vec{v}$$

$\omega = 2\pi \cos \theta$ $\rightarrow$ Sélectionné par la fréquence d'excitation et par λ .
 λ sélectionné par taille CL

→ Cause de l'ondynarige à grande échelle sur Terre (1,500 km)

$$\underline{\vec{c}_\phi = \frac{2R}{k} \cos \theta \vec{e}_k}$$

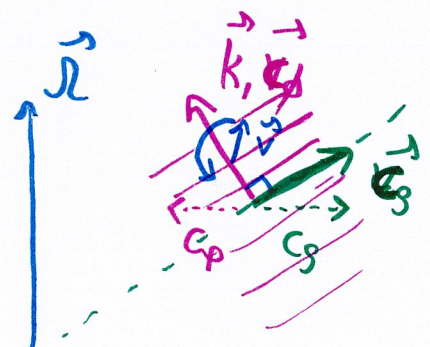
$$\vec{g} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \vec{e}_k + \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$C_3 + C_4$$

$$\vec{L}_g = -\frac{2R}{k} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{C}_g + \vec{C}_p = \frac{2h}{k} \vec{e}_z$$

$\vec{v} \perp \vec{k}$ Ondas transversas



4° Instabilités centrifuges

Rotation diff $\Omega(r) \sim r^{2R_0^*}$ $R_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r}$ $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 2(1+R_0^*) \vec{\Omega}(r)$

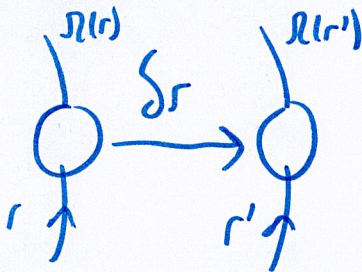
Vecteur tourbillon des R^* local: $\frac{1}{2} \vec{\nabla}^* \wedge \vec{v}^* = R_0^* \vec{\Omega}^*$

Terme supplémentaire:

$$[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]_A = [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]_R + \underbrace{r \Omega^2 \vec{e}_r}_{\text{inertie d'équilibre}} + \underbrace{2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{2 R_0^* v_r \vec{e}_\theta}_{\text{Rayleigh}}$$

→ Modif de Rossby: amplifié!

Raisonnement qualitatif



PFD: $\ddot{r} = f_{ie} - \partial_r p$

en r_0 : $f_{ie} = \partial_r p = -r \Omega^2$

conservation du moment cinétique: $r \Omega^2 = \text{cte}$

$$f_{ie}' = \frac{(r^2 \Omega)^2}{r^3}$$

pression inchangée:

$$\partial_r p' = r' \Omega'^2$$

On a donc: $\delta \ddot{r} = f_{ie}' - \partial_r p' = \frac{1}{r'^3} (r^4 \Omega^2 - r'^4 \Omega'^2) = -\frac{1}{r'^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \Omega^2)$

$$\delta \ddot{r} = -4 \Omega^2 (1 + R_0^*) \delta r$$

K^2 Fréquence épicyclique

$$K = 2 \Omega \sqrt{1 + R_0^*}$$

Poussent + loin

VP de l'opérateur $2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} + 2 R_0^* v_r \vec{e}_\theta$

$$\omega = \pm i K \cos \theta = \pm i \Omega \sqrt{1 + R_0^*} \cos \theta$$

→ On peut destabiliser

$$\sigma = \pm i K \cos \theta - \nu k^2$$

(...)

Critère de Rayleigh: $R_0^* \geq -1$ (stable)

III - Effets de la stratification

1° Structure verticale de l'atmosphère et des océans

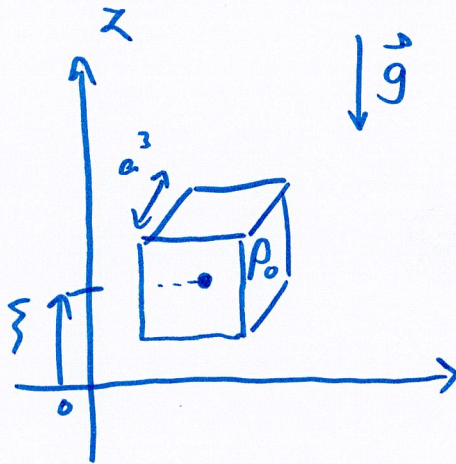
ρ n'est pas constant :

- $\rho_0(z)$ structure verticale
- $\rho(x, y, z)$ fluctuations de densité

Modèle Jovier Particule de fluide

PFD :

$$\rho_0 a^3 \ddot{\xi} = -\rho_0 a^3 g - p(\xi + ak)a^2 + p(\xi - ak)a^2$$



$$\rho_0 a^3 \ddot{\xi} = -\rho_0 a^3 g - \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\xi} a^3$$

$$\text{or } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\rho_0 \ddot{\xi} = g(\rho(\xi) - \rho(0)) \quad \rho_0 \ddot{\xi} = + g \frac{\partial \rho}{\partial z} \xi$$

$$\ddot{\xi} = \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{N^2} \xi$$

Fréquence de Brunt-Väisälä

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

stable si $\partial_z \rho < 0$ Stratifié stable

Dans l'atmosphère : $N \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $V = 30 \text{ m/s}$

$$\lambda \sim 30 \text{ km}$$

2° Approximation de Boussinesq

$$\begin{cases} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \\ \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

→ Vérifier l'hydrostatique

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(z) + \rho^*(\vec{r}, t) \\ p &= p_0(z) + p^*(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad \rho^* \ll \rho_0$$

Au premier ordre

→ Salinité
Température, (...) $b \vec{e}_z$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p^* + \overbrace{\rho^* \vec{g}}^{\text{Salinité, Température, (...)}} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \\ \frac{\partial p^*}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho_0 = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

↓

0 Incompressibilité

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_z = \alpha \vec{\nabla}^2 b$$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p^* + b \vec{e}_z + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{D b}{Dt} = -N^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_z + \alpha \vec{\nabla}^2 b \end{cases}$$

3% Structure verticale bij

$$2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_s = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad \nearrow \nabla \cdot \quad \Omega(\vec{V} \wedge \vec{U})_z = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -\partial_z b$$

$$\downarrow \vec{\Omega} \wedge$$

$$\downarrow \nabla \cdot \quad \Omega \partial_z \vec{V}_s = \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} p$$

$$\Omega^2 \vec{V}_s = -\frac{1}{2} \vec{\Omega} \wedge \vec{\nabla} p$$

$$\boxed{\vec{V}_s = \frac{\hat{e}_z \wedge \vec{\nabla} p}{\rho \Omega}} \quad \text{Ventr Houghes}$$

↳ Ventr d'ouest

↳ Struct verticale

4° Ondes internes / ondes de gravité

Ordre 1 : $\vec{v}, b$, idéal

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p^* + b \vec{e}_z \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} = -N^2 v_z \end{cases} \Rightarrow \underline{i\vec{k} \cdot \vec{v} = 0} \text{ ondes tr-sverses } (= \text{incompressibles})$$

$$\downarrow -\nabla_{\perp} \nabla_{\perp}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \vec{v} = \nabla_{\perp}^2 b \vec{e}_z \xrightarrow{\partial_t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \vec{v} = -N^2 \nabla_{\perp}^2 \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 v_z + N^2 \nabla_{\perp}^2 v_z = 0 \rightarrow \underline{\text{Ondes rectilignes}} (\neq \text{incompressibles})$$

$$\downarrow \omega^2 k^2 v_z + N^2 k^2 \sin^2 \theta v_z = 0$$

$$\underline{\omega = N \sin \theta} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda \text{ via la relation} \\ \searrow \theta \text{ via } \omega \end{matrix}$$

En ore

$$\underline{\vec{c}_{\phi} = \frac{N}{k} \sin \theta \vec{e}_k}$$

$$\underline{\vec{c}_g = \frac{N}{k} \cos \theta \vec{e}_o}$$

$$\underline{\vec{c}_g + \vec{c}_{\phi}}$$

$$\vec{c}_g + \vec{c}_{\phi} = \frac{N}{k} \vec{e}_z$$