

Introduction à la mécanique des Fluides Géophysiques et Astrophysiques (GAFD)



Guillaume Bermudez

Professeur Agrégé de Physique
CY Cergy Paris Université

Ecole d'été des Gustins
Aiguebelette-le-Lac
lundi 17 août 2026

@ guillaume.bermudez@cyu.fr

**LES GUSTINS
2026**



I. Introduction

Introduction

► Objet d'étude : Mécanique des fluides géophysiques et astrophysiques (GAFD)



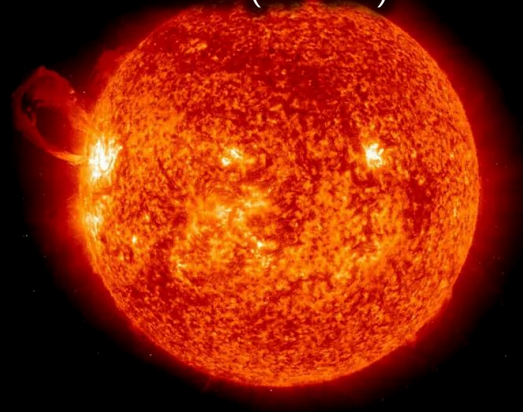
Introduction

► **Objet d'étude : Mécanique des fluides géophysiques et astrophysiques (GAFD)**

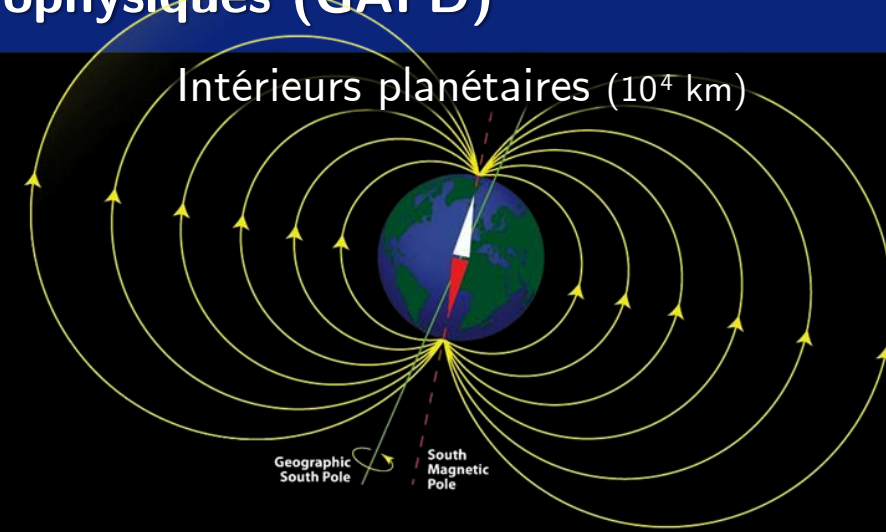
Galaxies & milieu interstellaire (10^{16} km)



Etoiles (10^6 km)



Intérieurs planétaires (10^4 km)



Ecoulements à taille humaine (10 m)



Climat et océans (100 km)



Lunes et satellites (10^3 km)



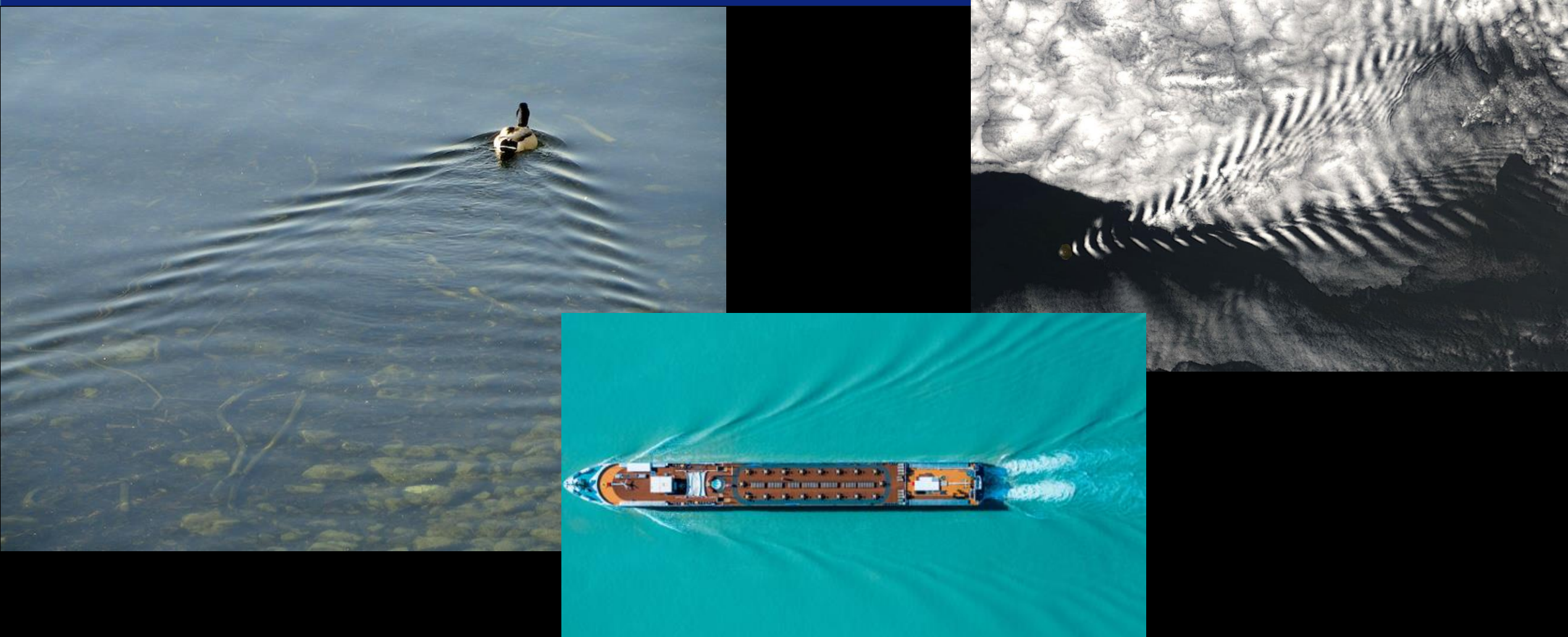
Introduction

► Vorticité et turbulence



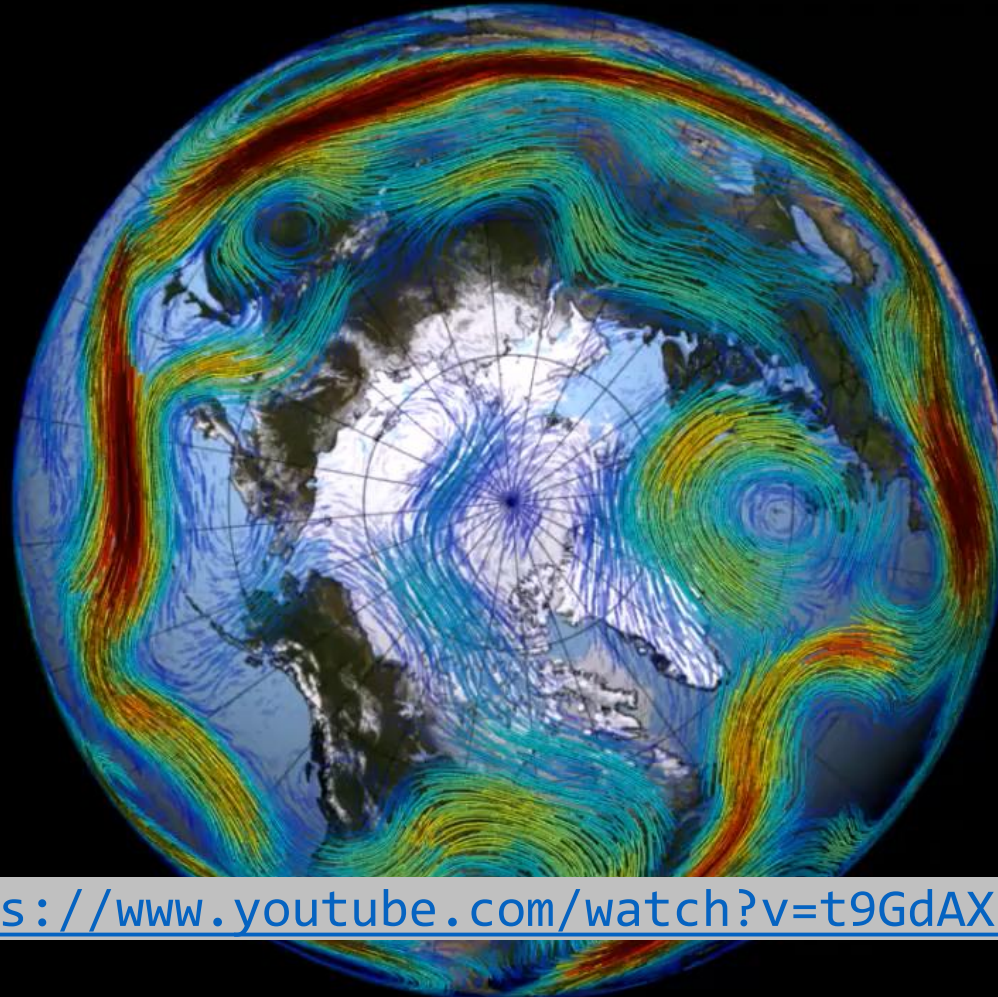
Introduction

► Ondes et instabilités



Introduction

► Les jets streams



<https://www.youtube.com/watch?v=t9GdAXScGh0>

Introduction

► Contexte en physique mathématique et computationnelle

Sept problèmes du millénaire de l'institut de mathématiques Clays

“Existence de solutions régulières de l'équation de Navier-Stokes (incompressible)”

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Equation aux dérivées partielles non-linéaire

Modélisation du climat

Modèle numérique efficace des équations du climat

Menu

I. Introduction

II. Cadre général : Equation primitives

Equation de continuité, Equation de Navier–Stokes, Stabilité hydrodynamique

III. Effets de la rotation

Forces d'inertie, Equilibre géostrophique, Ondes de Rossby, Instabilités centrifuges

IV. Effets de la stratification

Structure verticale de l'atmosphère, Ondes internes, Instabilités convectives

II. Cadre général : Équations primitives



Cadre général

► Equations primitives

- **Equation de continuité** (conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$$

- **Equation de Navier–Stokes** (bilan de quantité de mouvement)

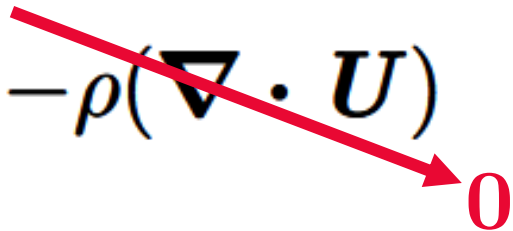
$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right)}_{\frac{D\mathbf{U}}{Dt}} = -\nabla P + \mathbf{f} + \eta \nabla^2 \mathbf{U}$$

Cadre général

► Equations primitives

► Equation de continuité (conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad Ma \hat{=} \frac{U}{c_s} \ll 1$$

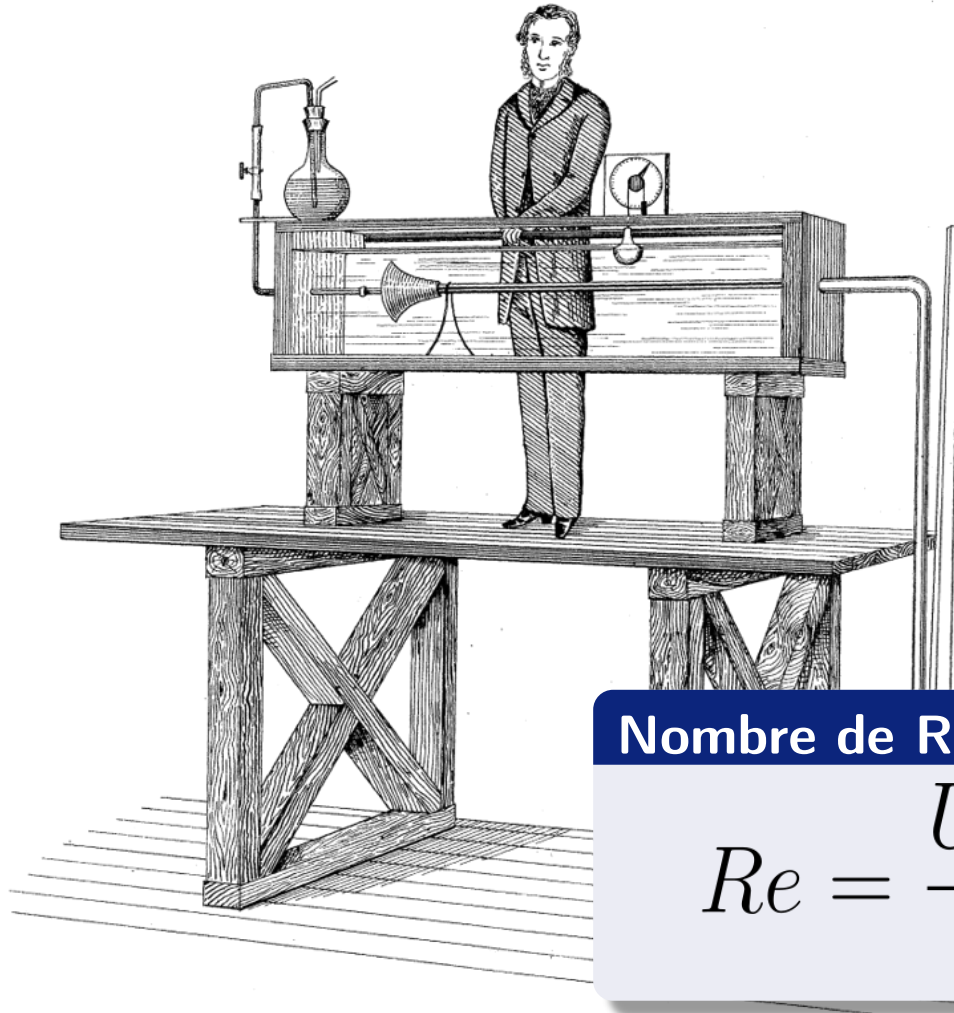


► Equation de Navier–Stokes (bilan de quantité de mouvement)

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right)}_{\frac{D\mathbf{U}}{Dt}} = -\nabla P + \mathbf{f} + \eta \nabla^2 \mathbf{U}$$

Cadre général

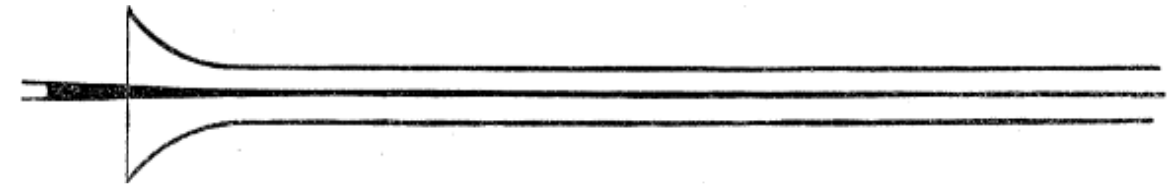
► Instabilités hydrodynamiques



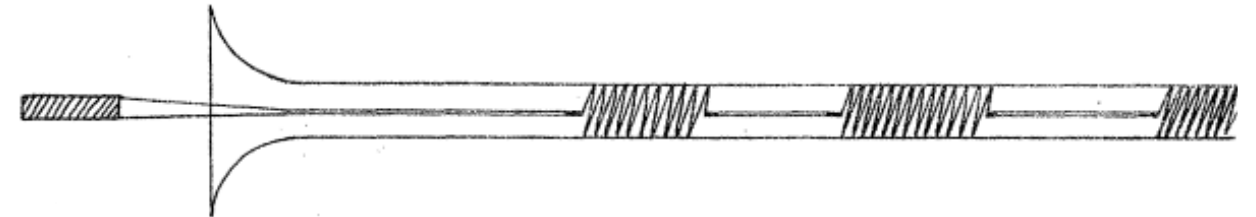
Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

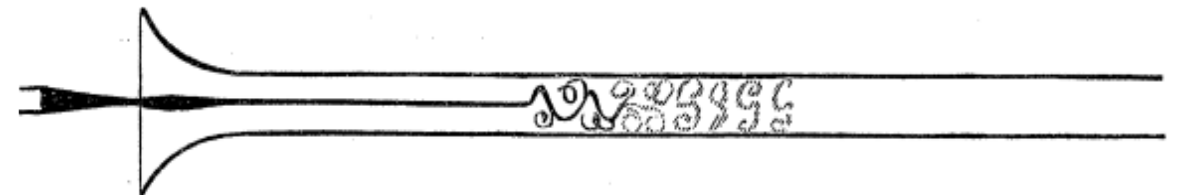
Écoulement laminaire $Re < 2000$



Écoulement intermittent $2000 < Re < 4000$



Écoulement turbulent $Re > 4000$



O. Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc.* 174, 1883

Cadre général

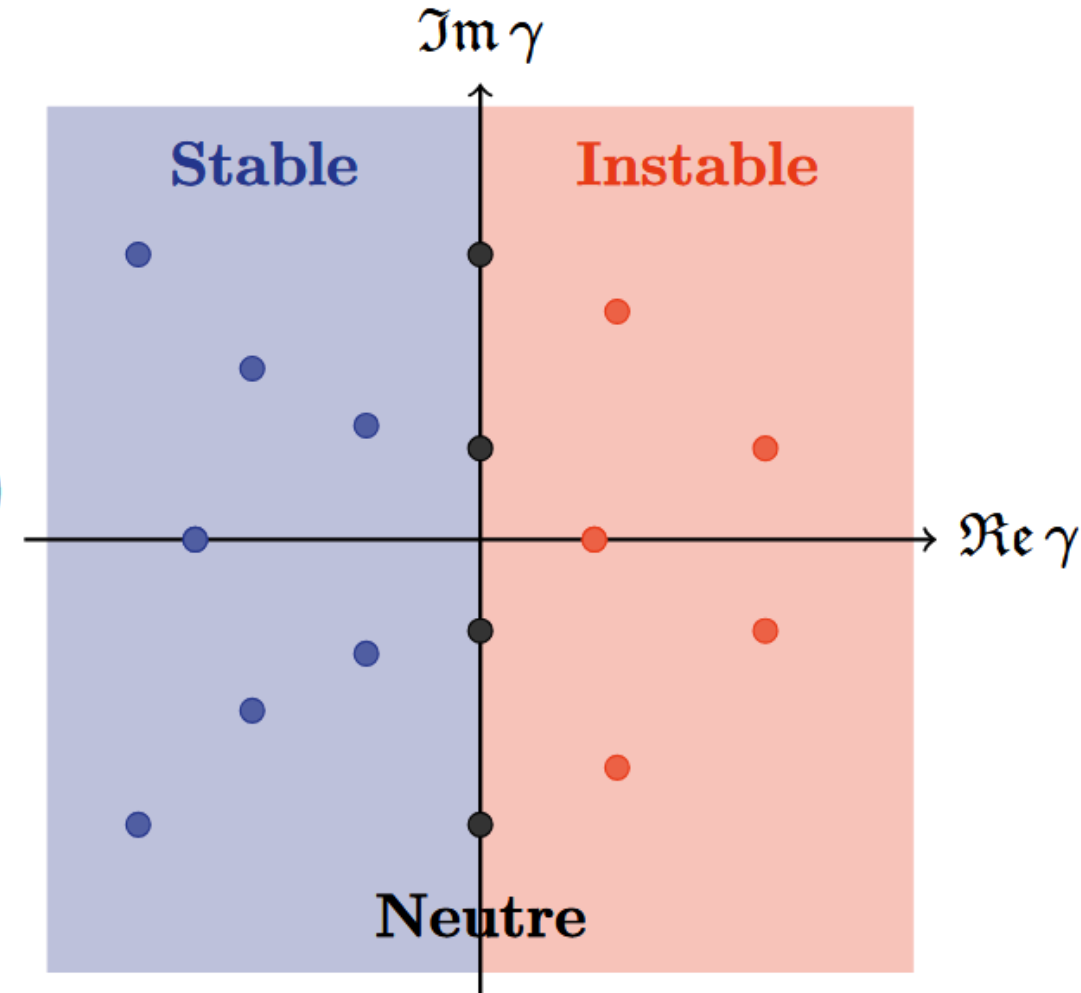
► Instabilités à faible dimensions

► Système dynamique

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}) \simeq \underbrace{\left(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) \right)}_{\mathcal{L}} \mathbf{x} + \mathcal{O}(\mathbf{x}^2)$$

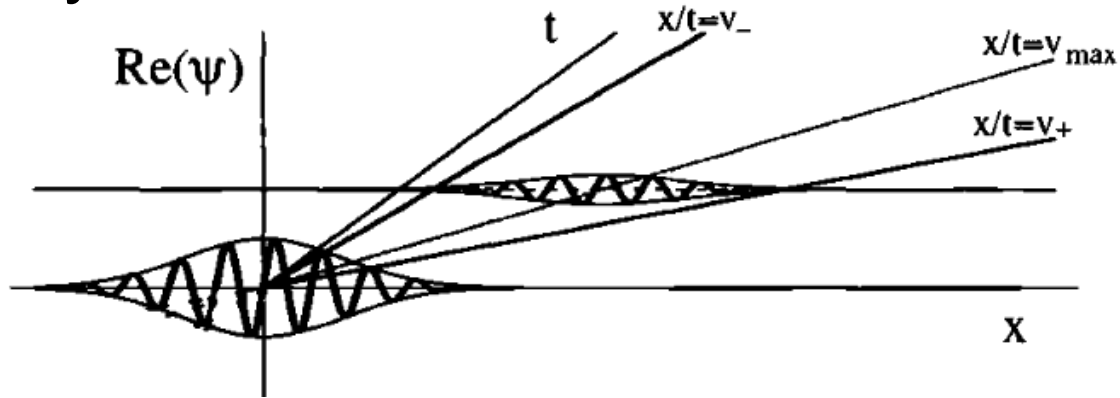
$$x_i(t) = x_i(0) \exp(\gamma_i t)$$



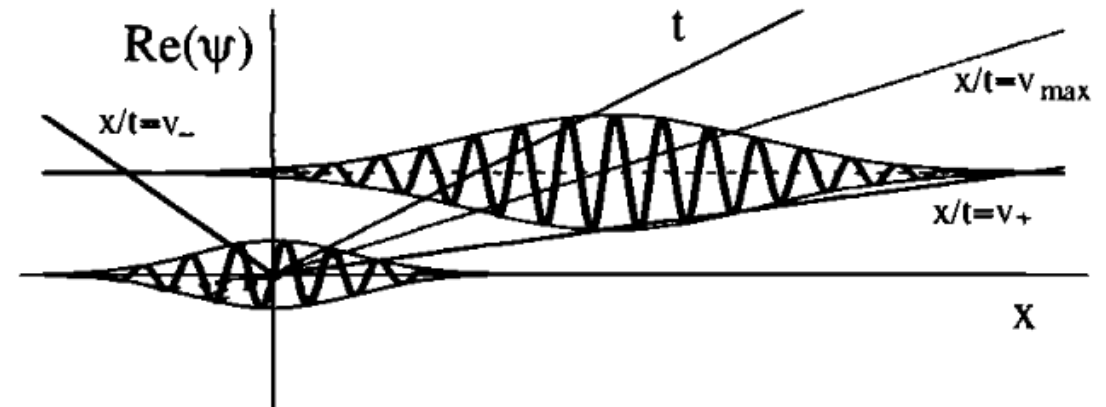
Cadre général

► Instabilités à faible dimensions

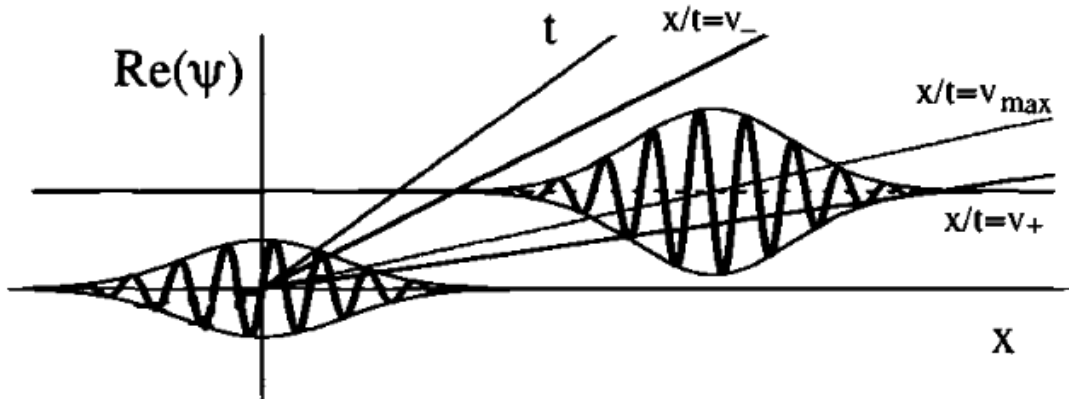
► Système stable



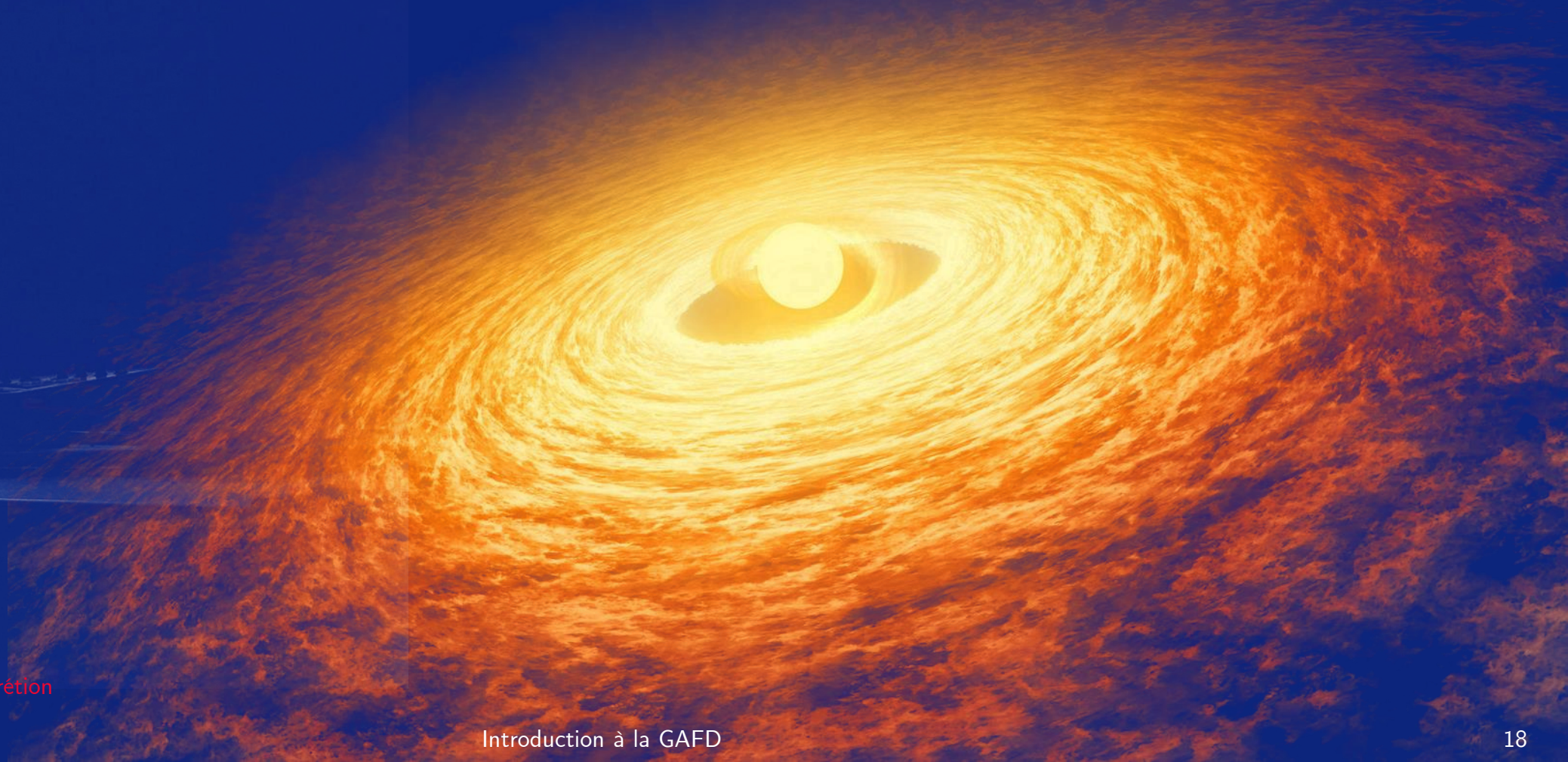
► Système absolument instable



► Système convectivement stable



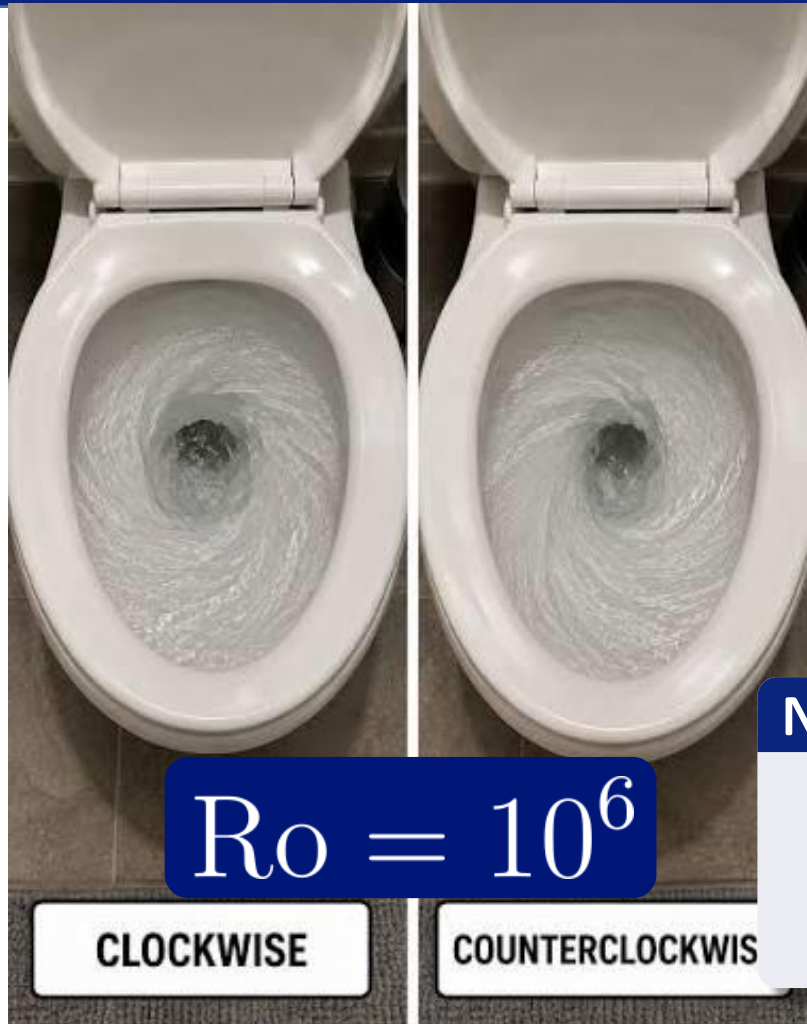
III. Effets de la rotation



Vue d'artiste d'un disque d'accrétion

Effets de la rotation

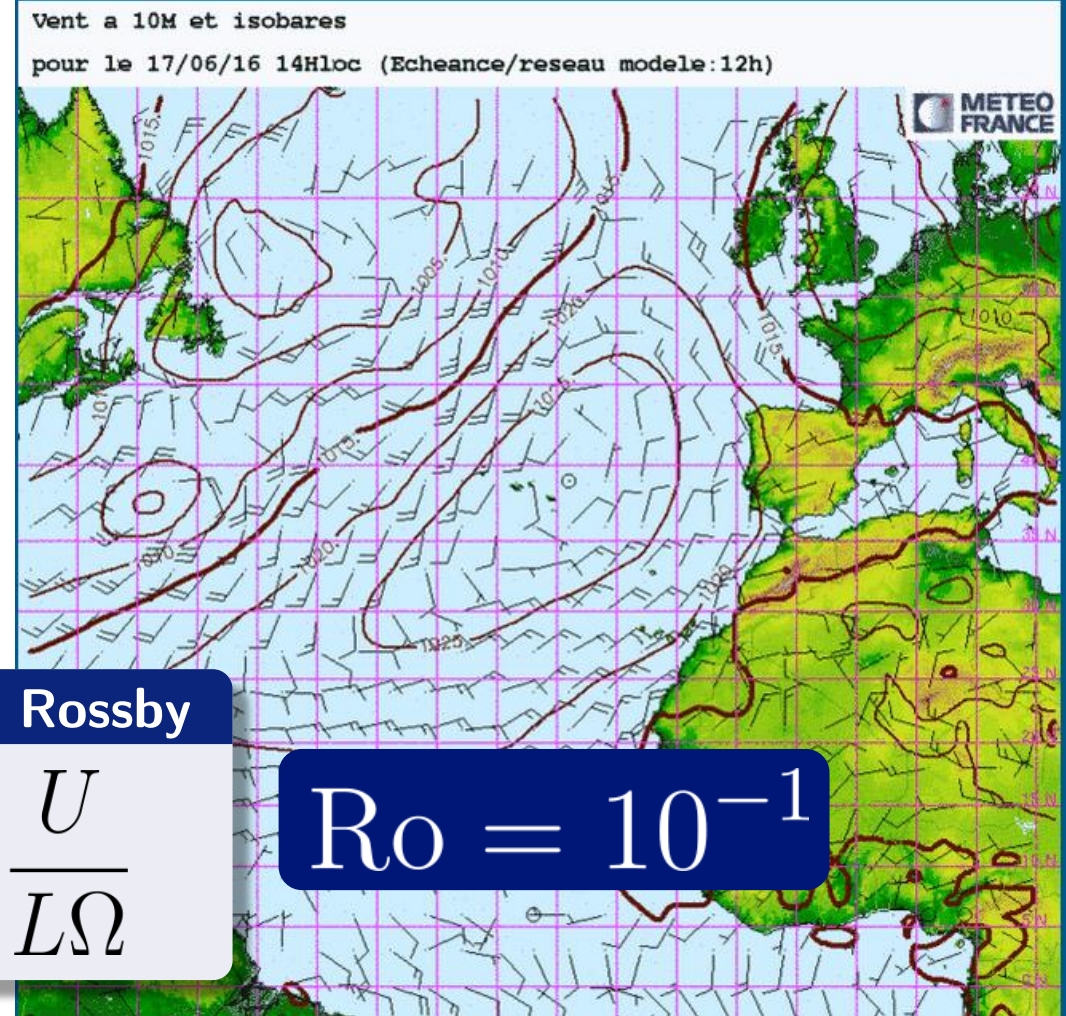
► Approximation géostrophique



Nombre de Rossby

$$R_o = \frac{U}{L\Omega}$$

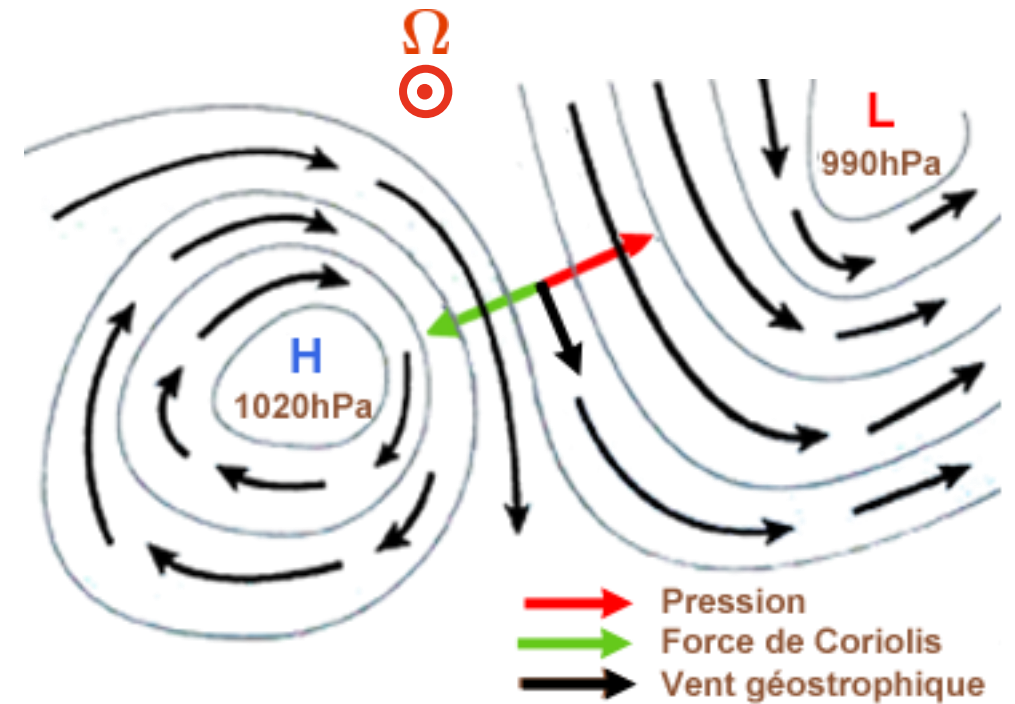
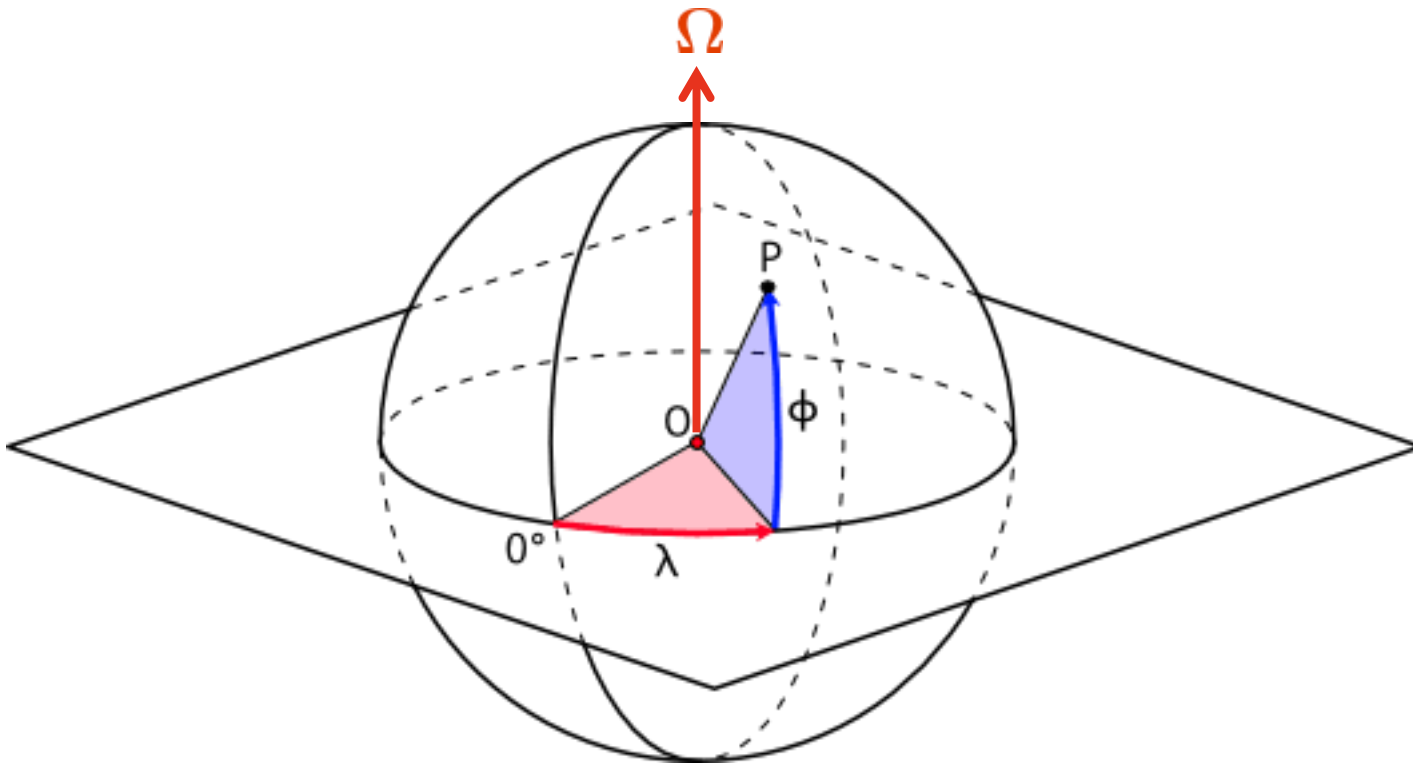
$$R_o = 10^{-1}$$



Effets de la rotation

► Approximation géostrophique

Hémisphère nord :



Effets de la rotation

► Formulaire

$$(6) \quad \nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$(7) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

$$(8) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$$

$$(9) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(10) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$(11) \quad \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

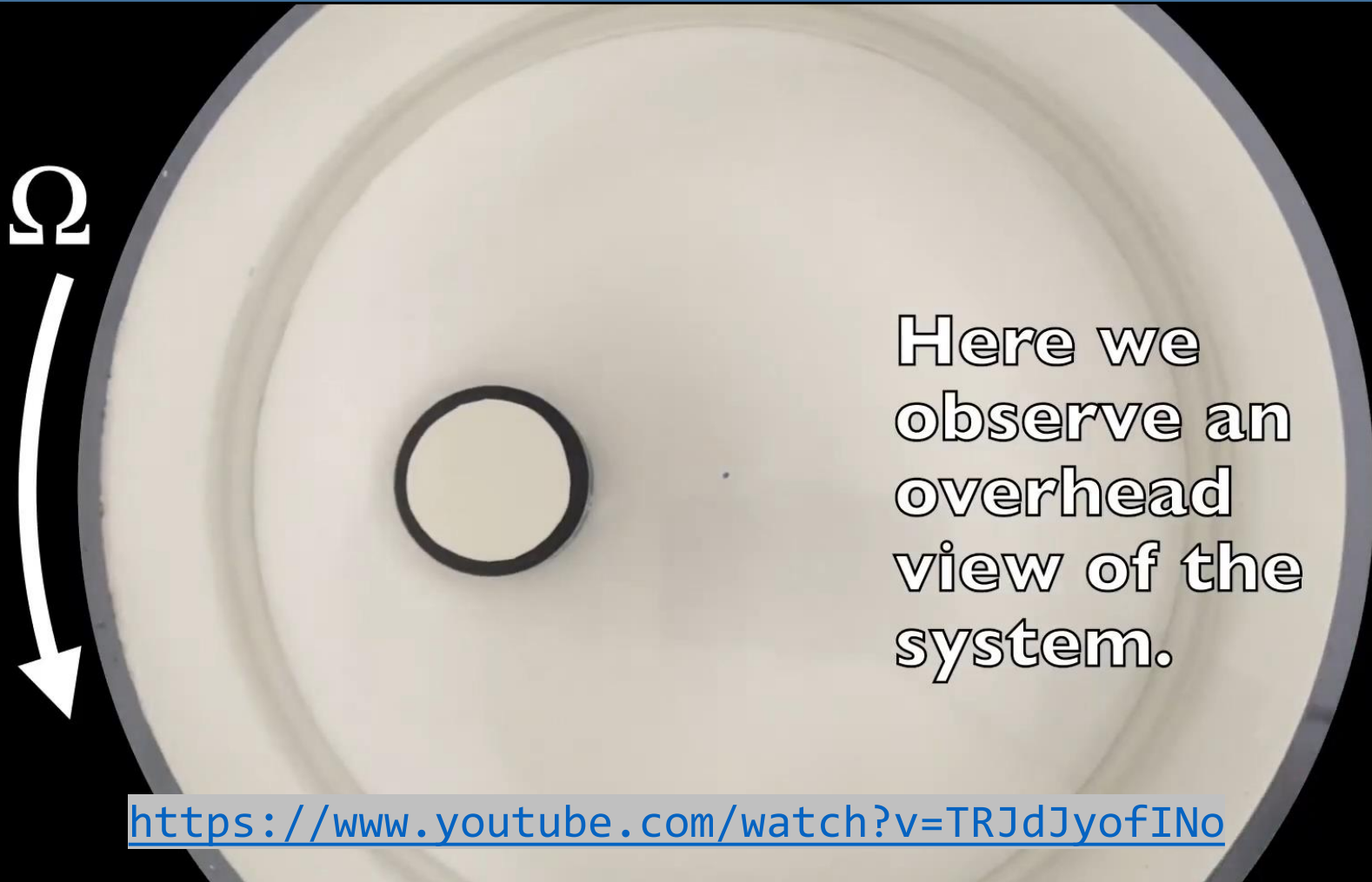
$$(12) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(13) \quad \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

$$(14) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Effets de la rotation

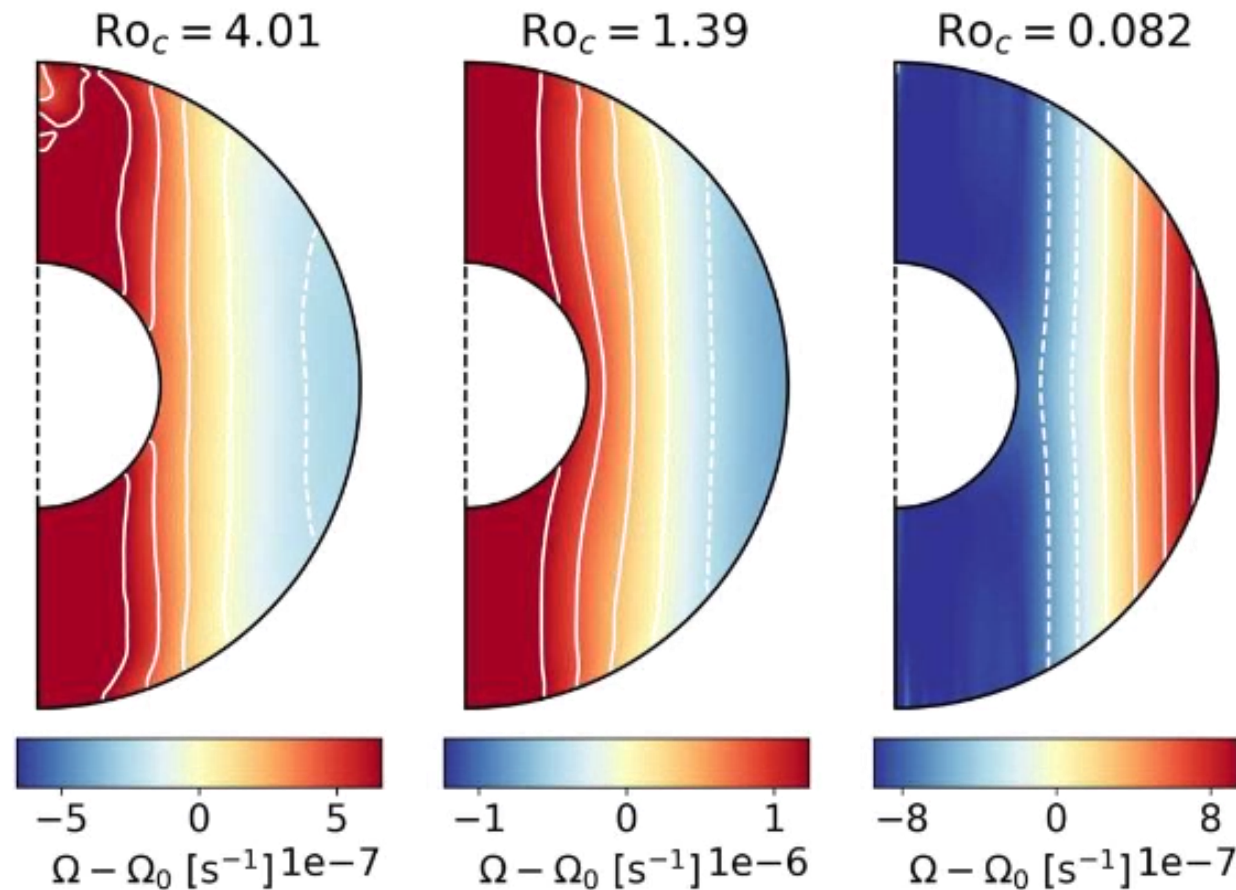
► Colonnes de vortex Taylor



Effets de la rotation

► Colonnes de vortex Taylor

► Simulations numériques dans les étoiles

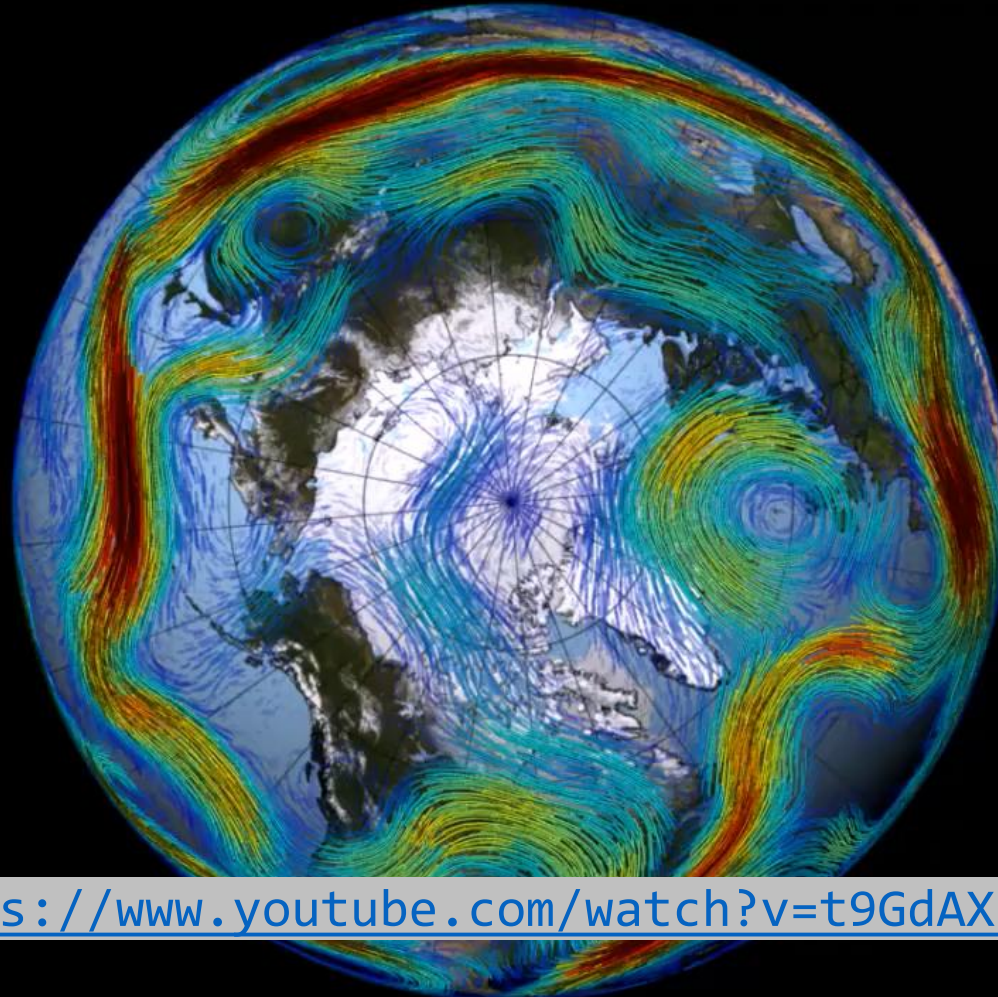


Camisassa et al, *Astrophys. J.* 938:65, 2022

Effets de la rotation

► Ondes de Rossby

► Jetstream

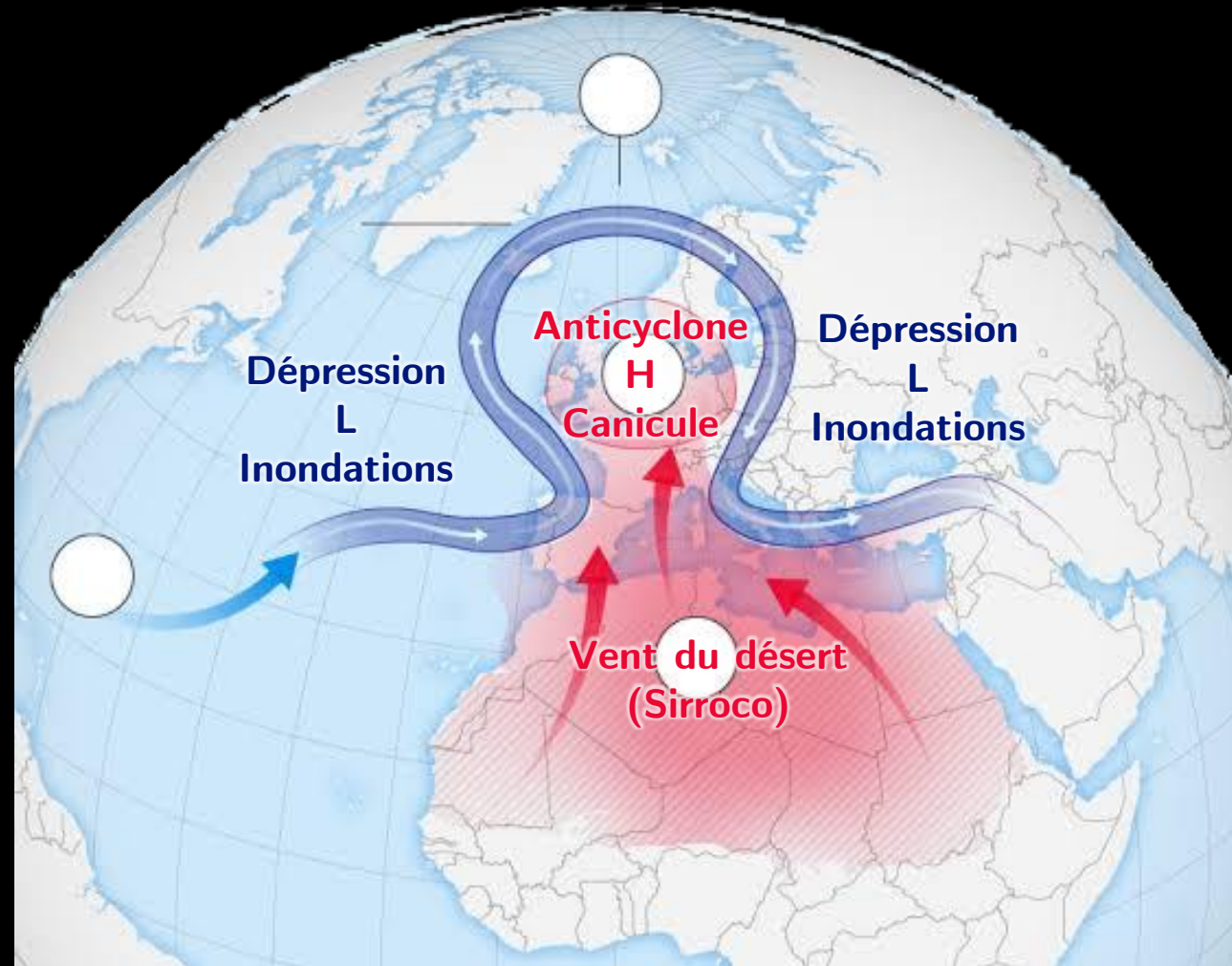


<https://www.youtube.com/watch?v=t9GdAXScGh0>

Effets de la rotation

► Ondes de Rossby

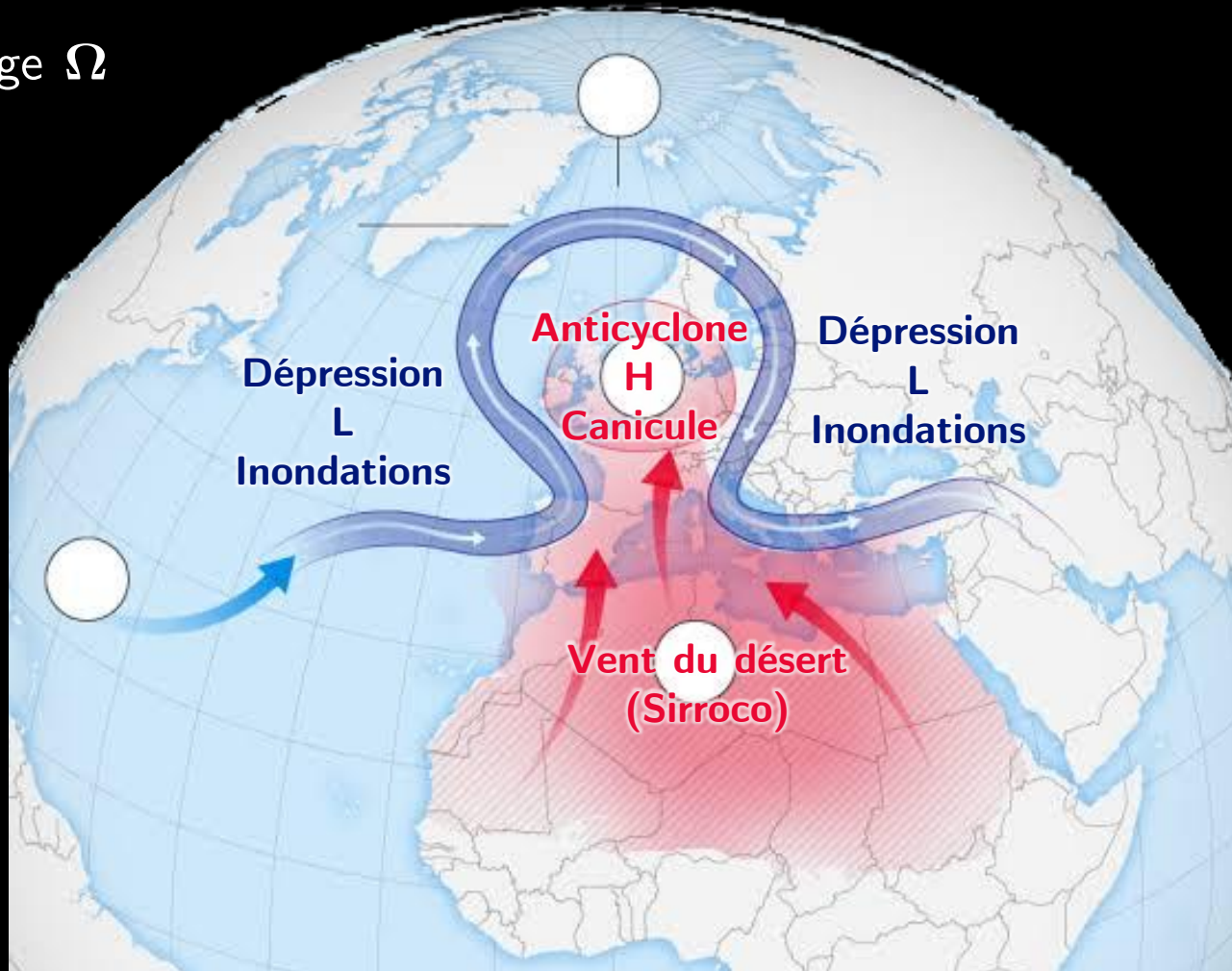
► Blocage Ω



Effets de la rotation

► Ondes de Rossby

► Blocage Ω

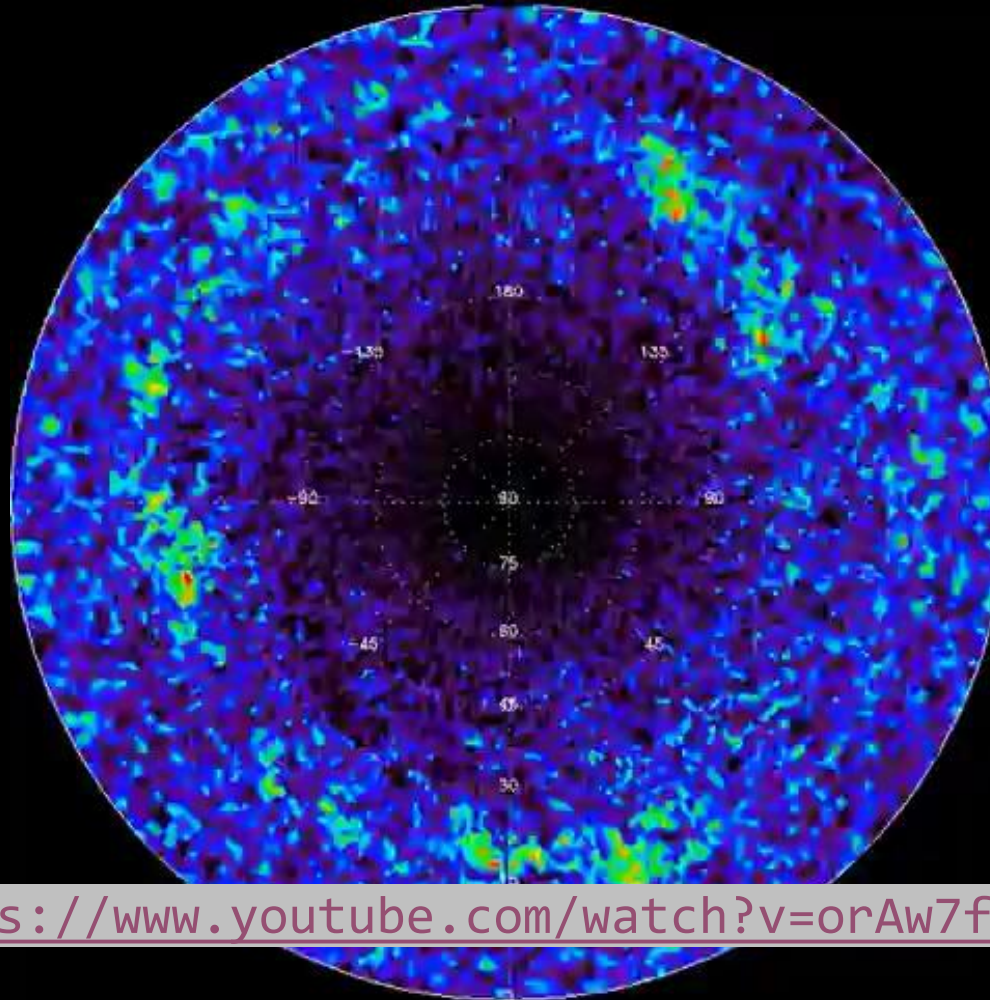


Année	Zone	Dégâts
2003	Canicule Europe	70 000 † 13 Md€
2010	Canicule et méga-feux Russie	55 000 † 560 000 Ha 🔥 13 Md€
2010	Inondations Pakistan	2 000 † 13 000 000 Ha 🌊 8 Md€
2012	Inondations Chine	500 † 5 000 000 Ha 🌊 21 Md€
2026	Canicule et méga-feux Europe	> 6 000 † (France) > 500 000 Ha 🔥 > 15 Md €

Effets de la rotation

► Ondes de Rossby

► Solaire



<https://www.youtube.com/watch?v=orAw7f5xye8>

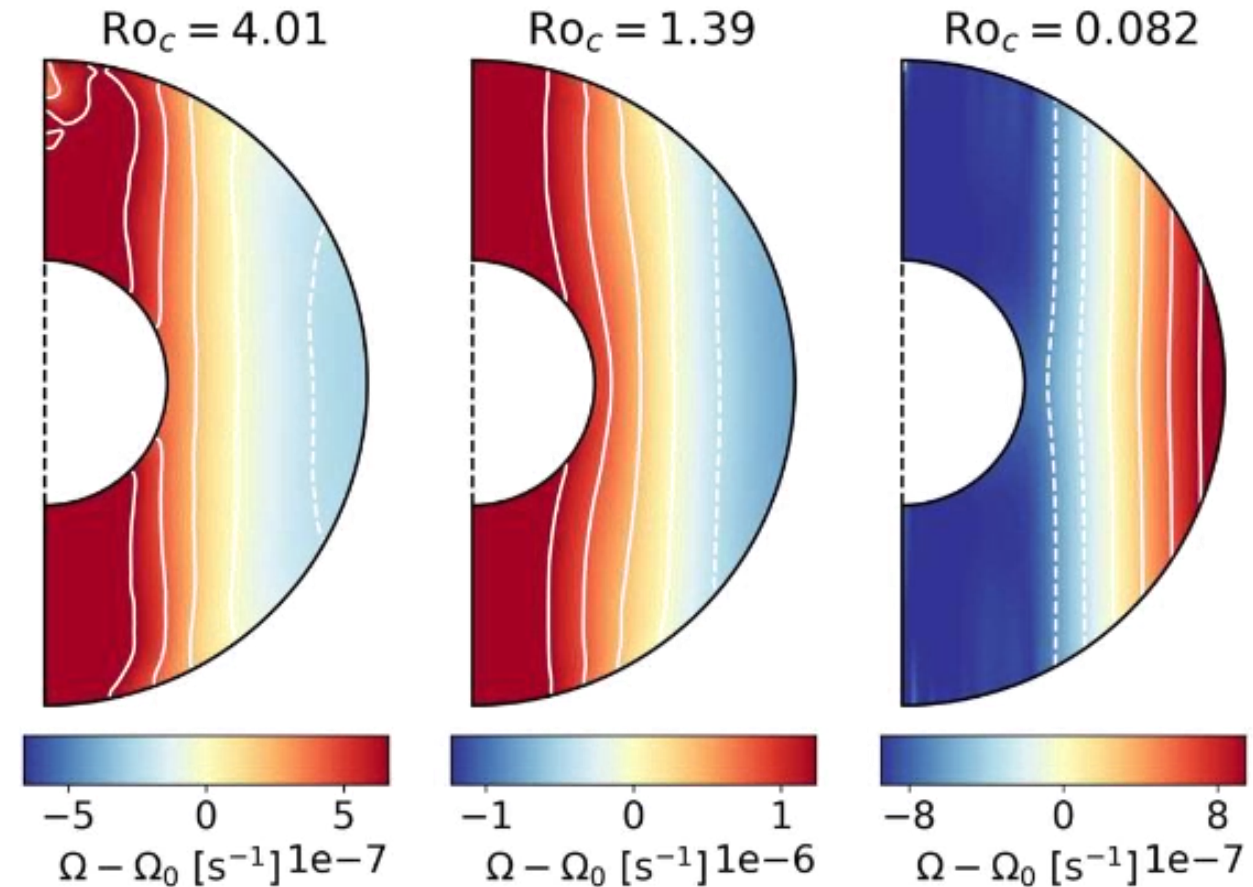
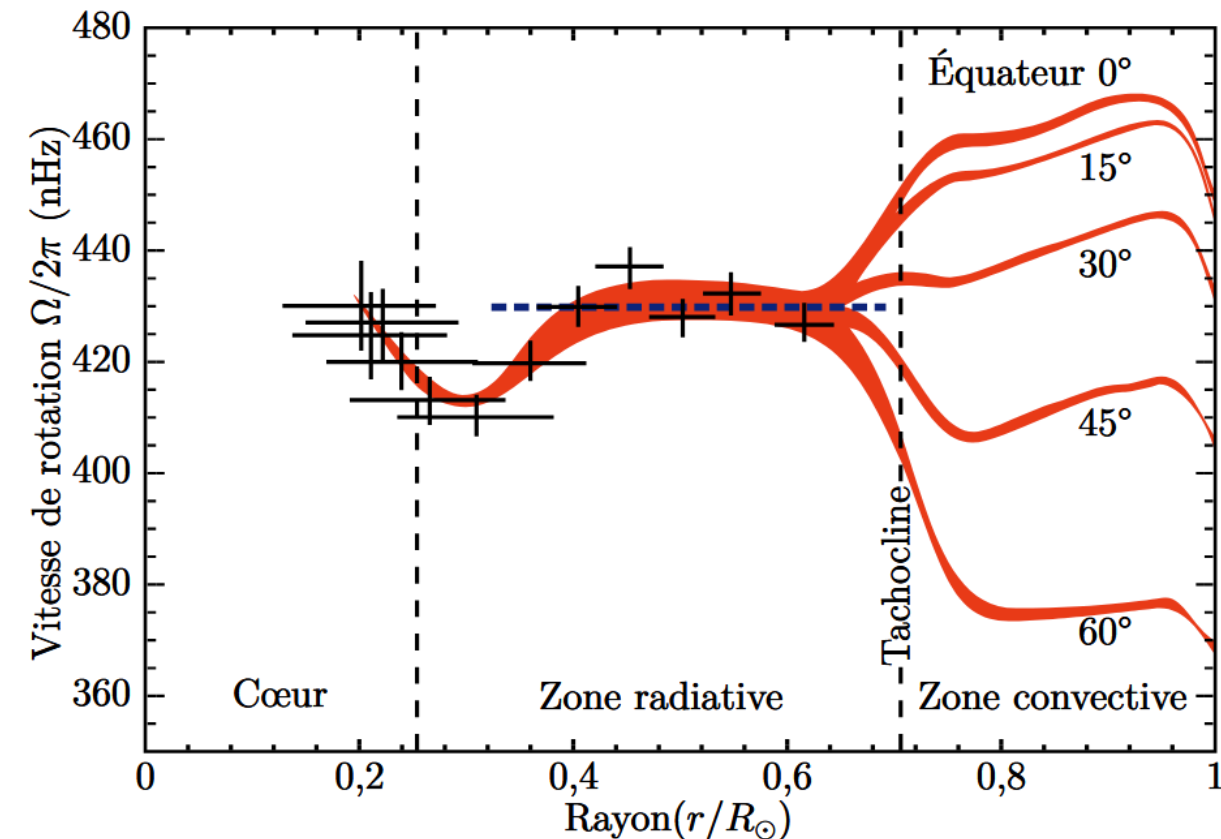
Break



Effets de la rotation

► Rotation différentielle

► Quelques observation astronomiques : Etoiles

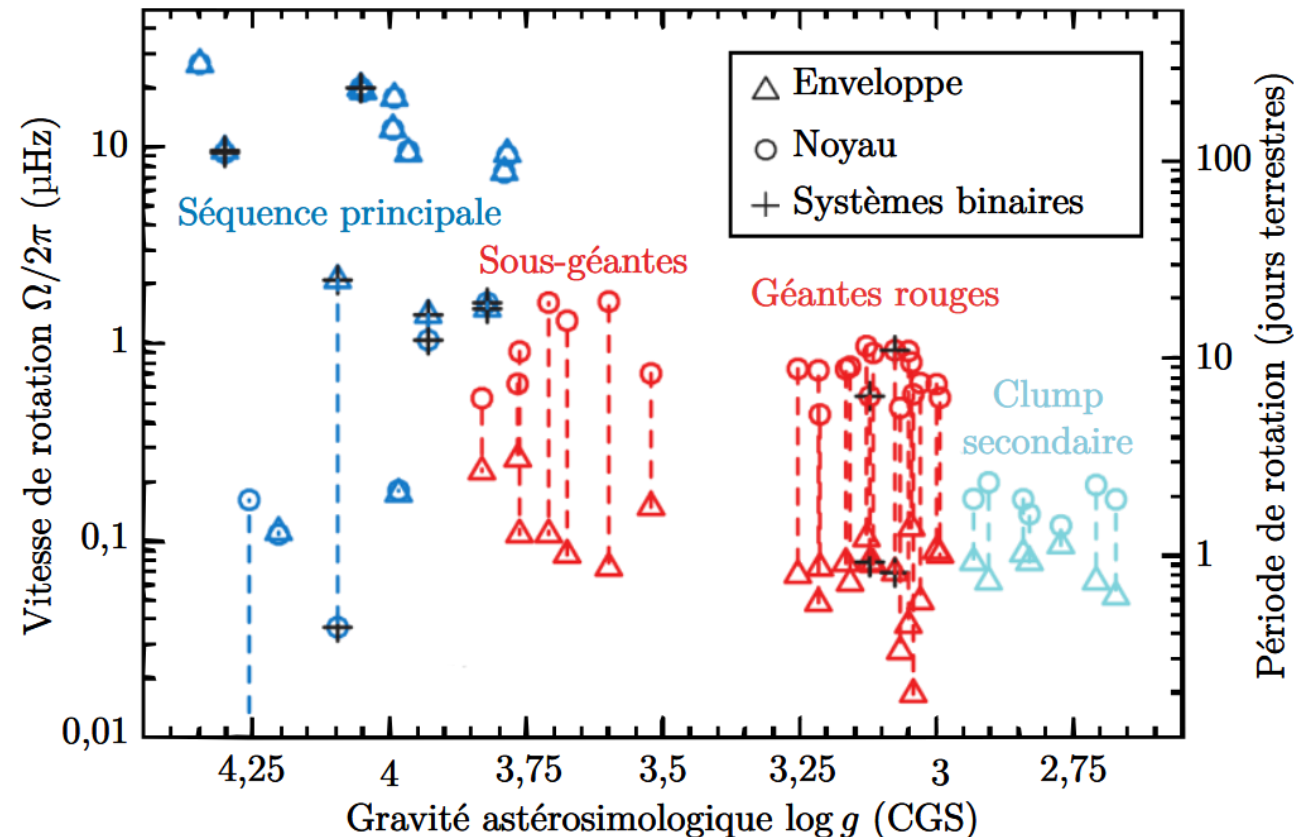


Garcia, Turck-Chièze et al, *Science* 316:5831, 2007 ; Camisassa et al, *Astrophys. J.* 938:65, 2022

Effets de la rotation

► Rotation différentielle

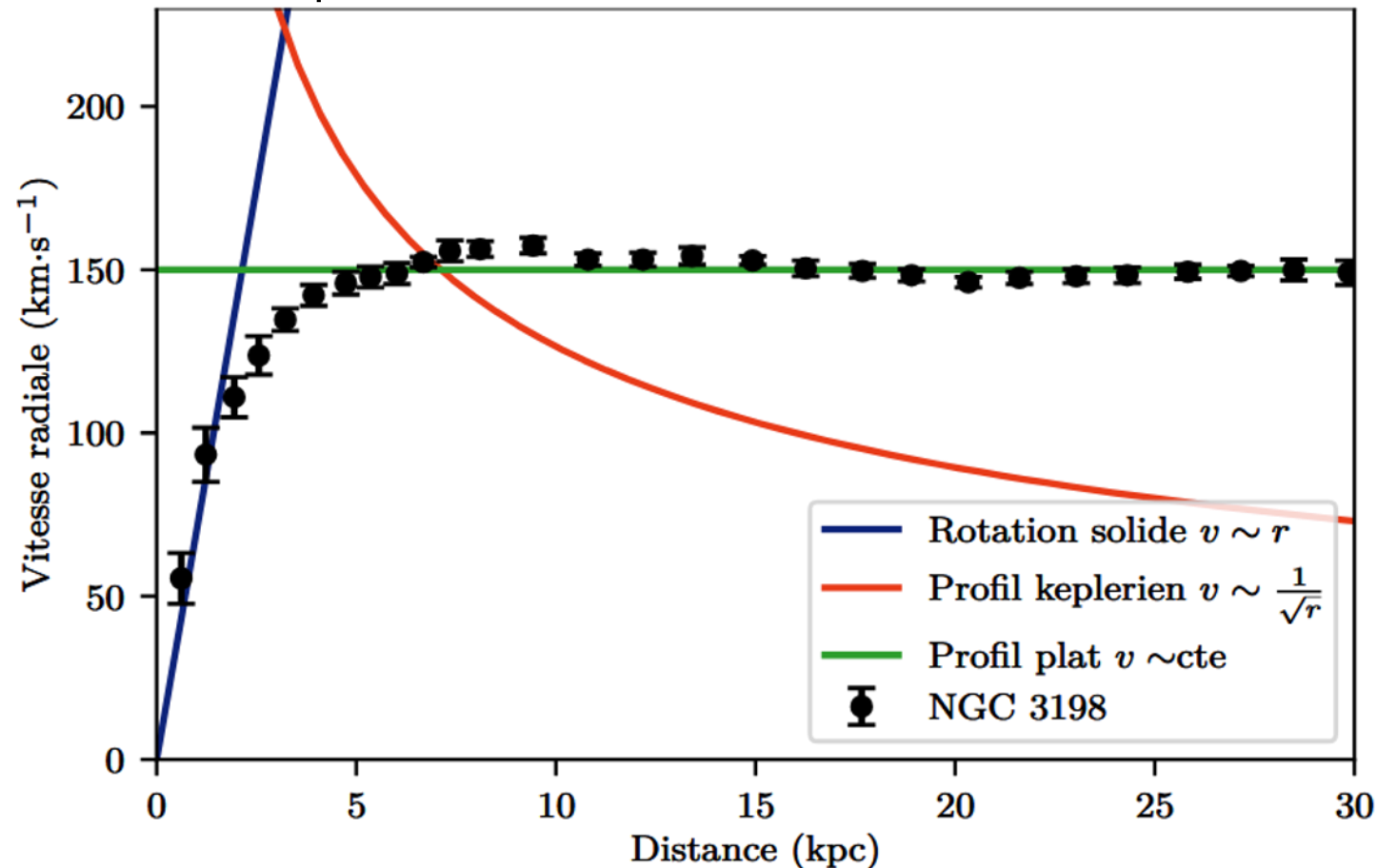
► Quelques observation astronomiques : Etoiles



Effets de la rotation

► Rotation différentielle

► Quelques observation astronomiques : Galaxies



Effets de la rotation

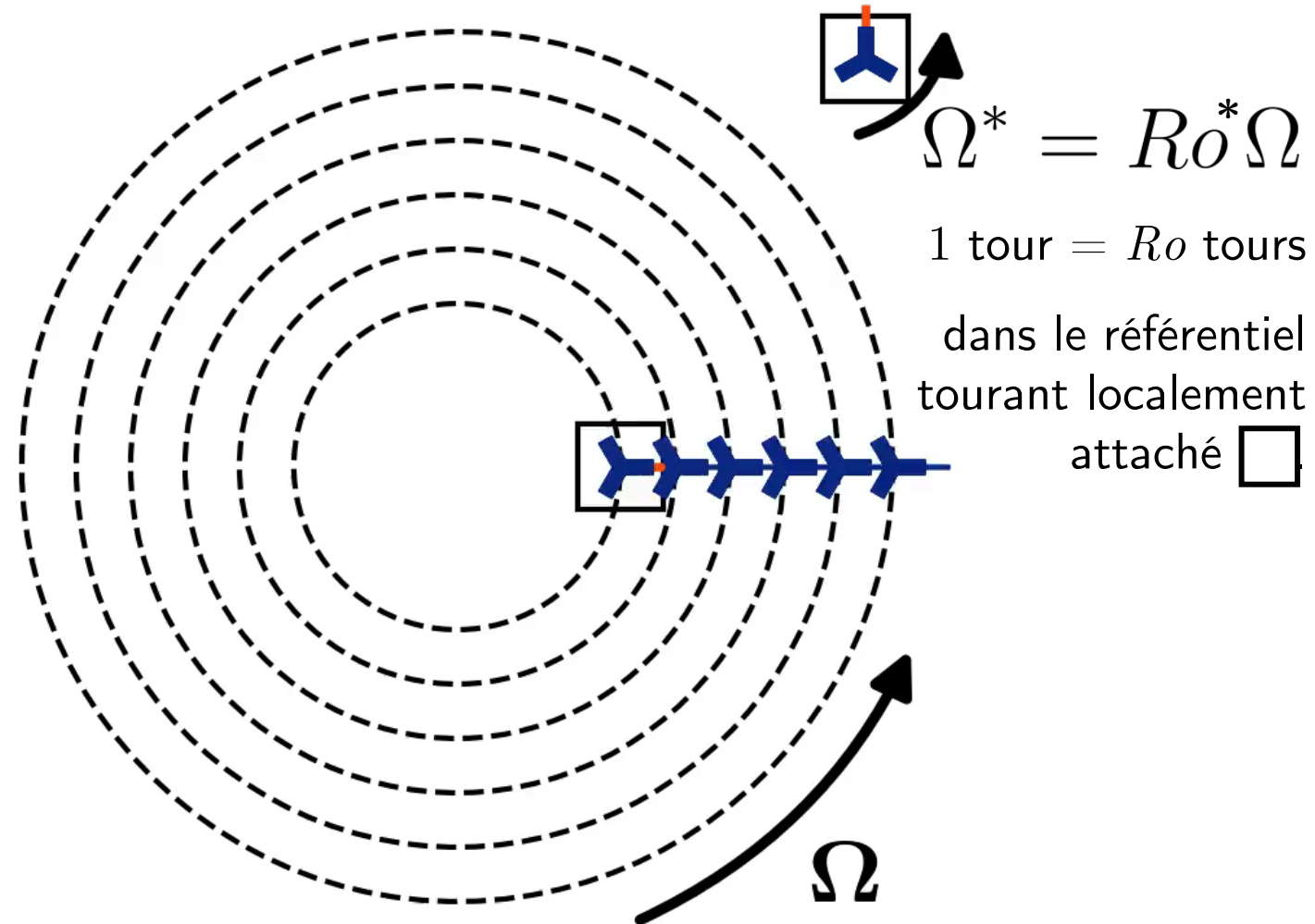
► Rotation différentielle

► Un nombre sans dimension supplémentaire :

Nombre de Rossby local

$$Ro^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r}$$

$$Ro^* = 0, \\ \Omega \sim \text{cte}, V \sim r$$



Effets de la rotation

► Rotation différentielle

► Quelques modèles usuels

Nombre de Rossby local

$$Ro^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r}$$

Profil	Ro^*	$\Omega(r)$	$U_\theta(r)$	Exemples
Rotation solide	0	cte	r	Atmosphères planétaires, océans [148], intérieurs stellaires [5], intérieurs planétaires [8]
Plat	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{r}$	cte	Galaxies spirales [149]
Keplerien	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{r^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{r}}$	Disques d'accrétion [2, 150, 151]
Irrotationnel	-1	$\frac{1}{r^2}$ ^a	$\frac{1}{r}$	Cyclones, tornades (vortex de Rankine) [37]

Effets de la rotation

► Instabilité centrifuges - Instabilité de Taylor–Couette (1923)

► Cisaillement dû à la rotation : un nombre sans

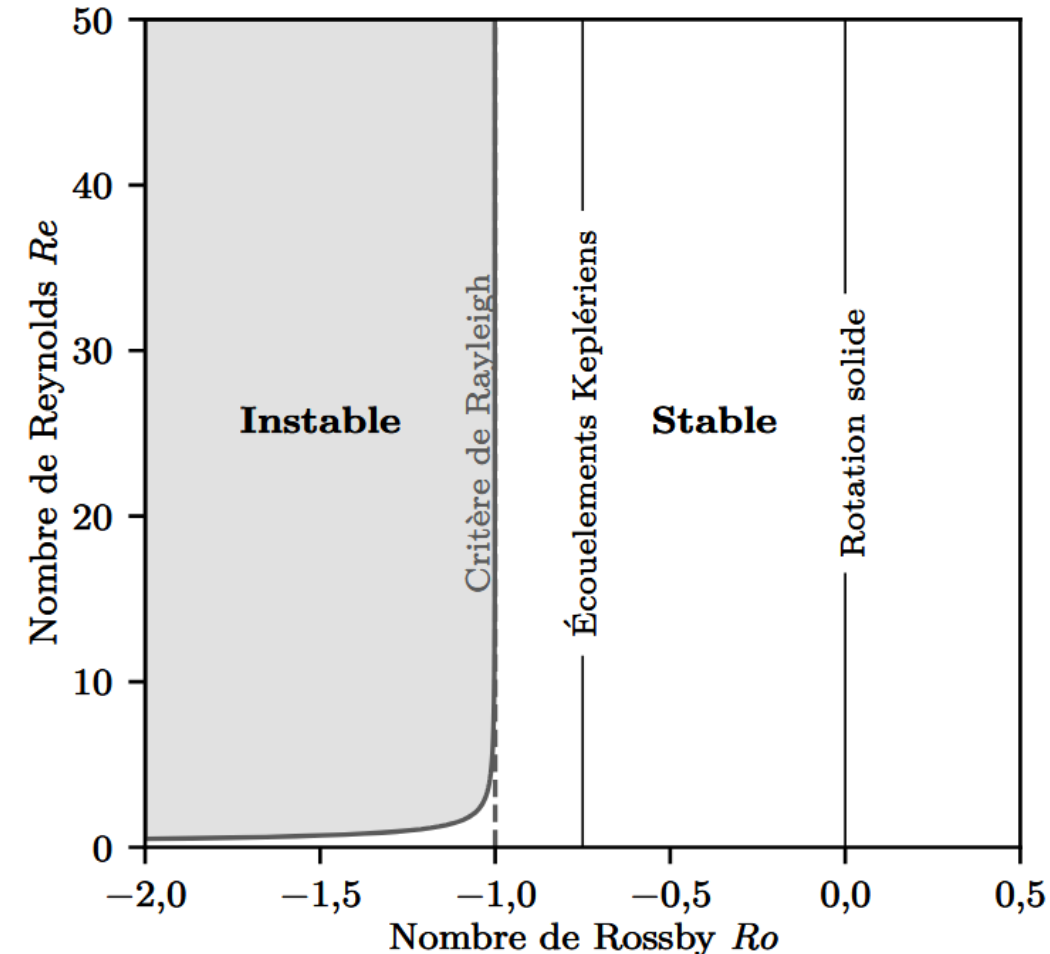
dimension supplémentaire : $Ro = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r}$

Dans le référentiel tournant $\rightarrow \Omega^* = Ro \Omega$
localement attaché

Critère de Rayleigh (1917)

$$Ro = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r} \geq -1$$

► Déstabilisation centrifuge, à haut Re



J.W.S. Rayleigh, *Proc. R. Soc. A* 93, 1917 ; G.I. Taylor, *Phil. Trans. R. Soc.* 223, 1923

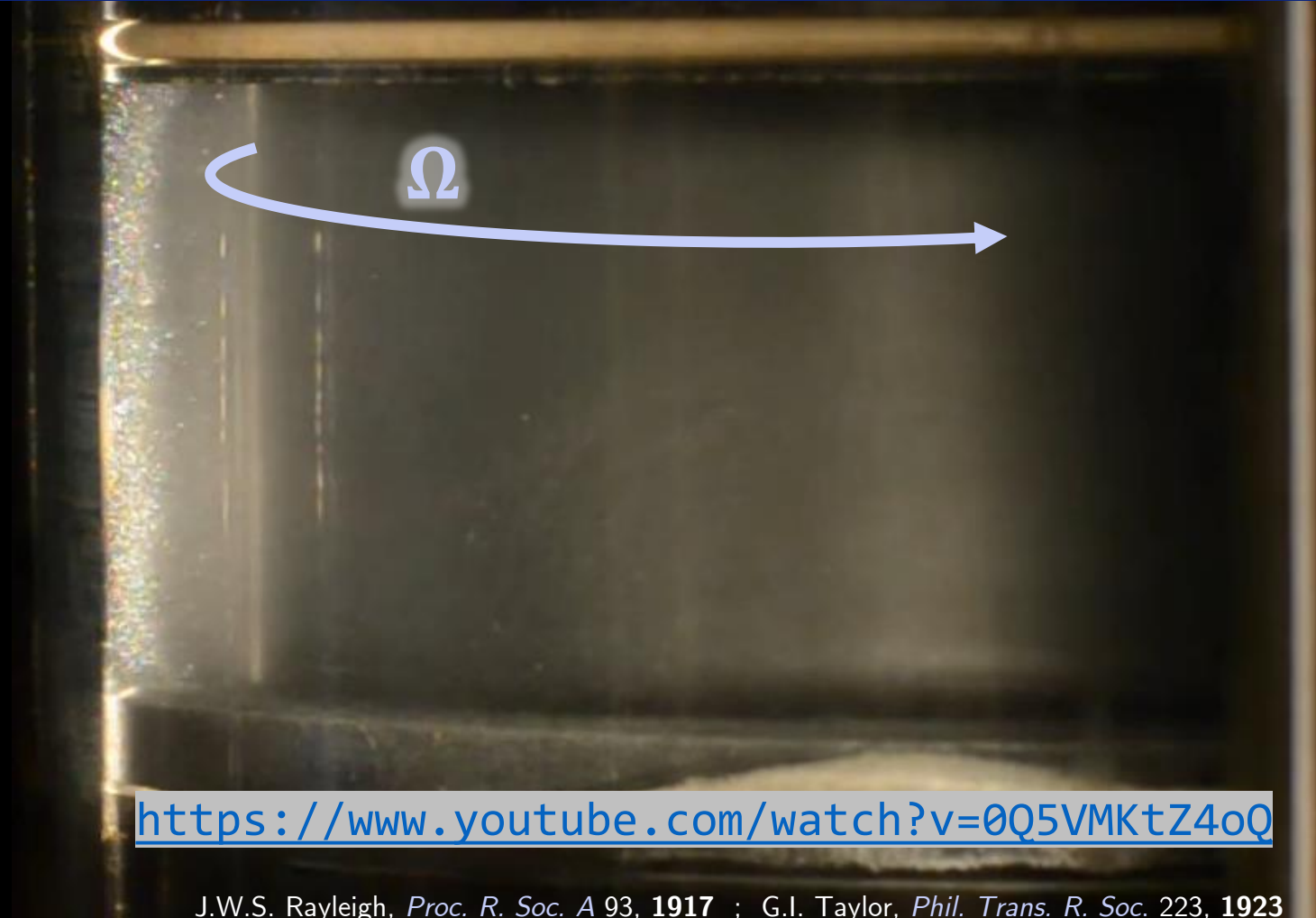
Effets de la rotation

► Instabilité centrifuge de Taylor–Couette (1923)

► Cisaillement dû à la rotation = instable

Critère de Taylor (1923)

$$Re^2 = \frac{4\Omega^2 R^4}{\nu^2} \gtrsim 1708$$



<https://www.youtube.com/watch?v=0Q5VMKtZ4oQ>

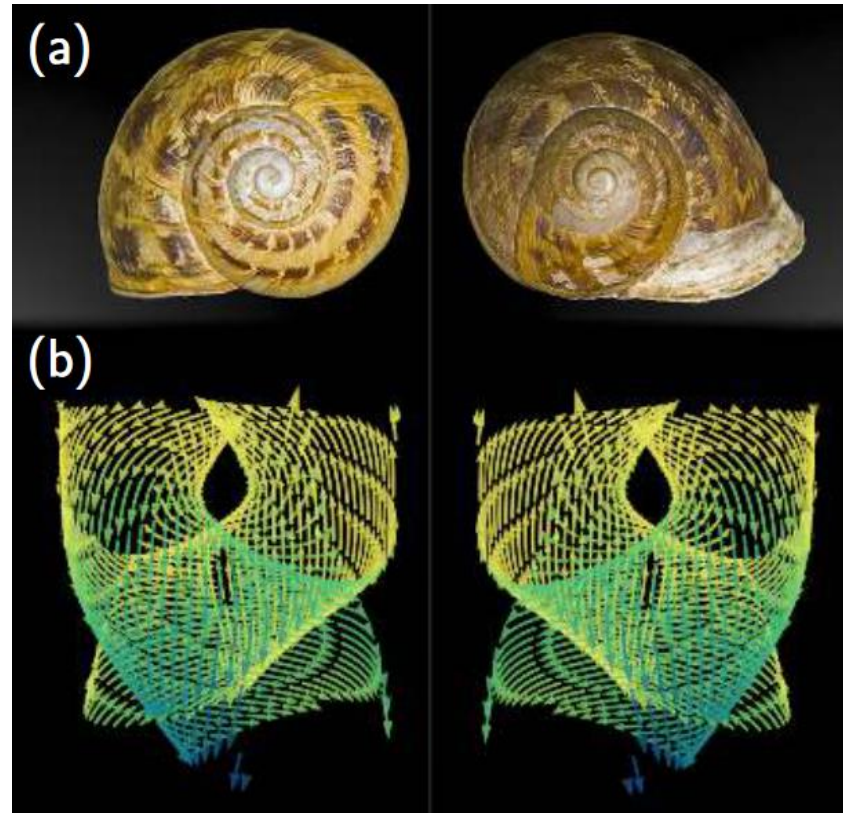
J.W.S. Rayleigh, *Proc. R. Soc. A* 93, 1917 ; G.I. Taylor, *Phil. Trans. R. Soc.* 223, 1923

Effets de la rotation

► Modes hélicaux

$$\nabla \wedge \mathbf{h}_k^\pm = \pm k \mathbf{h}_k^\pm$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}_k^\pm = 0.$$



Constantin Majda, *Comm. Maths Phys.* 115,3 1988

Effets de la rotation

► Modes hélicaux + approximation JWKB

$$\nabla^2 \simeq -k^2$$

$$\nabla^{-2} \left(-\nabla \wedge \nabla \wedge (\hat{\mathbf{e}}_z \wedge \mathbf{A}) \right) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \triangleq \frac{\ell}{k}$$

$$\nabla^{-2} \left(-\nabla \wedge \nabla \wedge (A_r \hat{\mathbf{e}}_\theta) \right) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

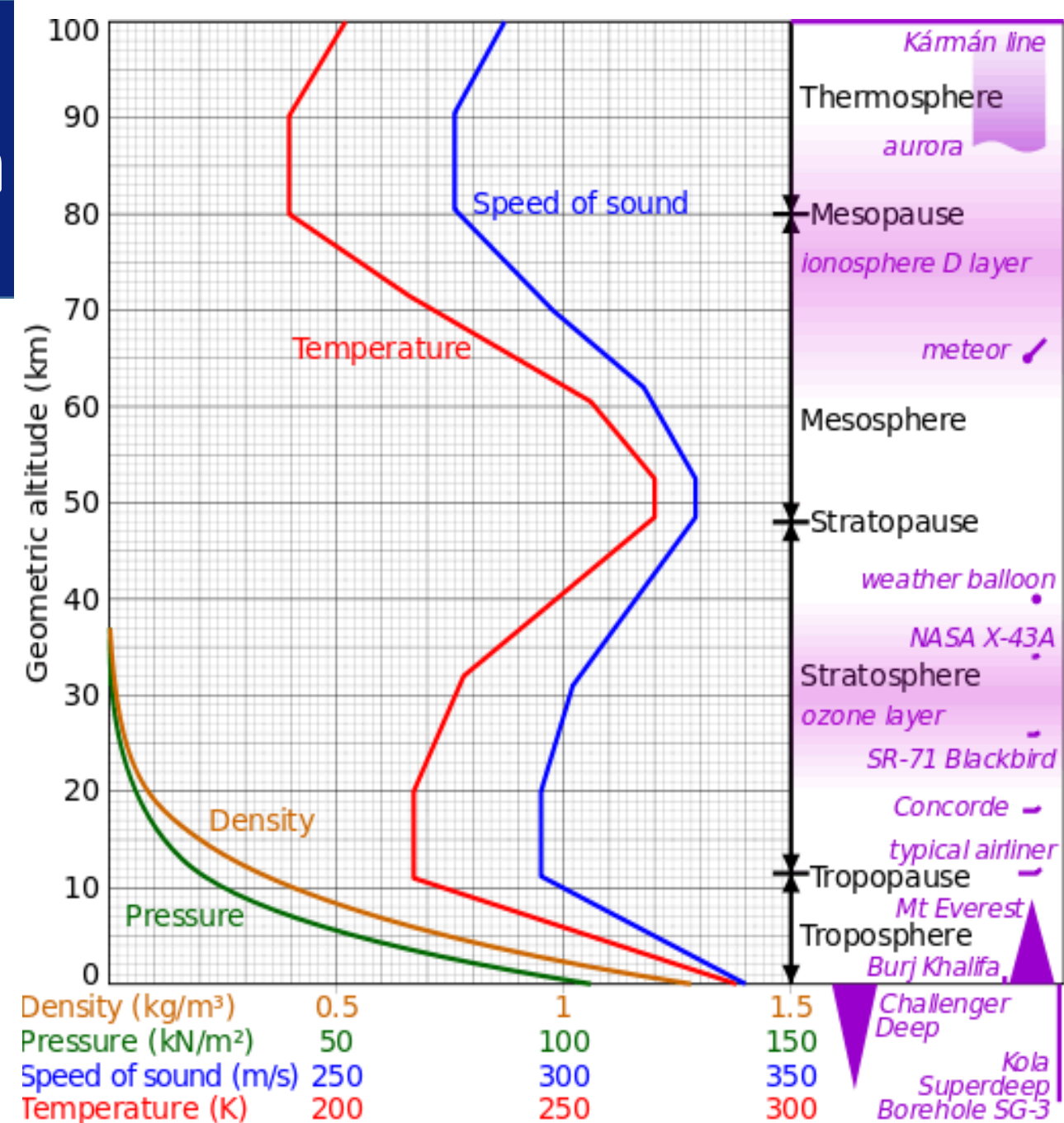
IV • Effets de la stratification



Plongeurs dans le Lac Baïkal, Russie

Effets de la stratification

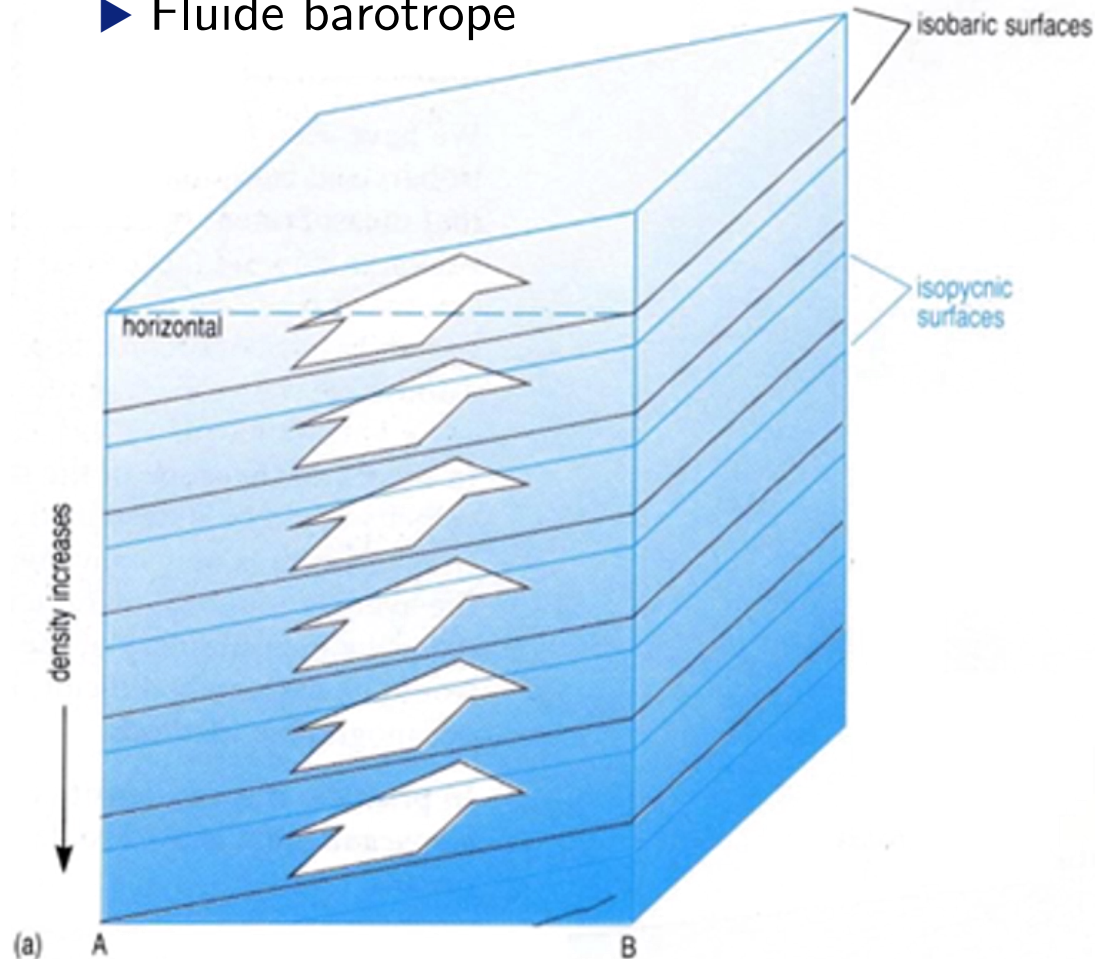
► Structure verticale de l'atmosphère



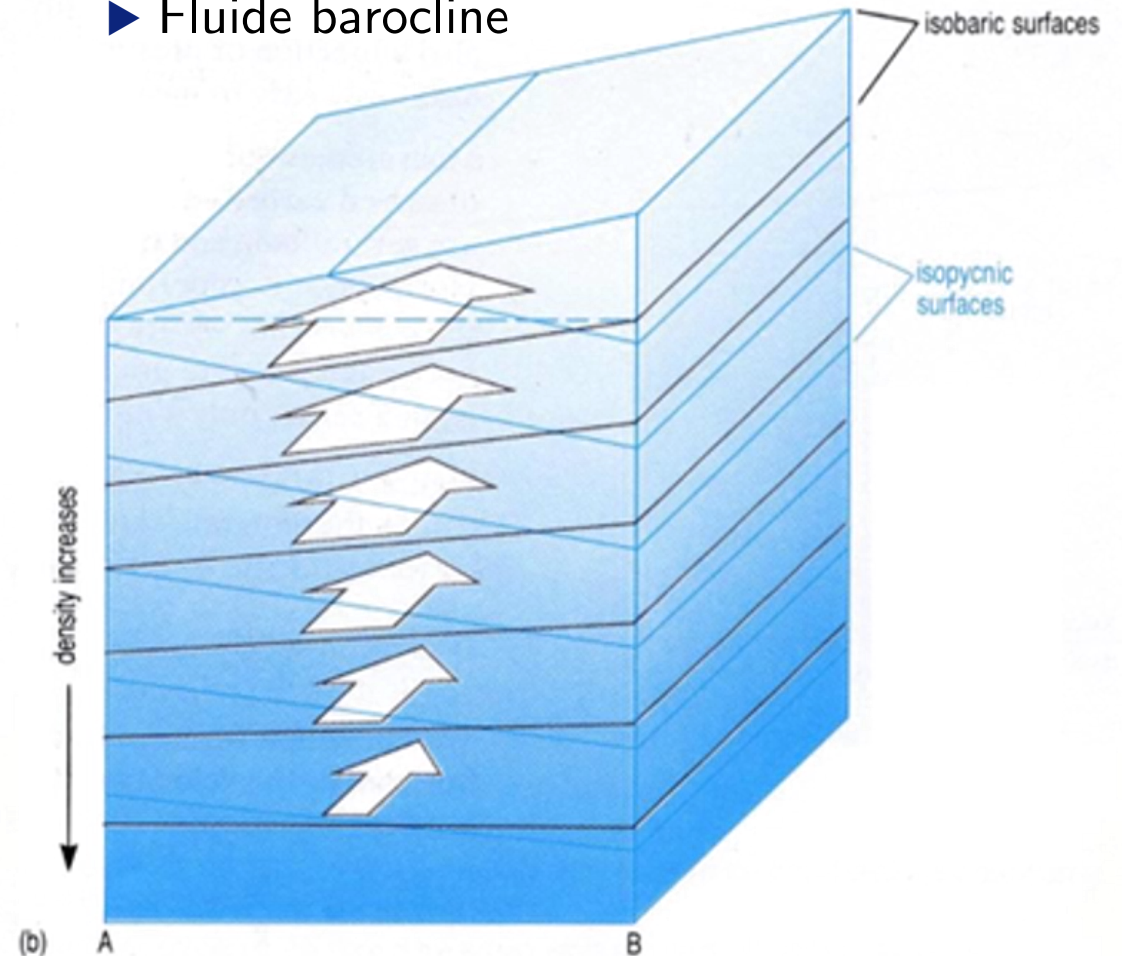
Effets de la stratification

► Fluide barotrope / barocline

► Fluide barotrope

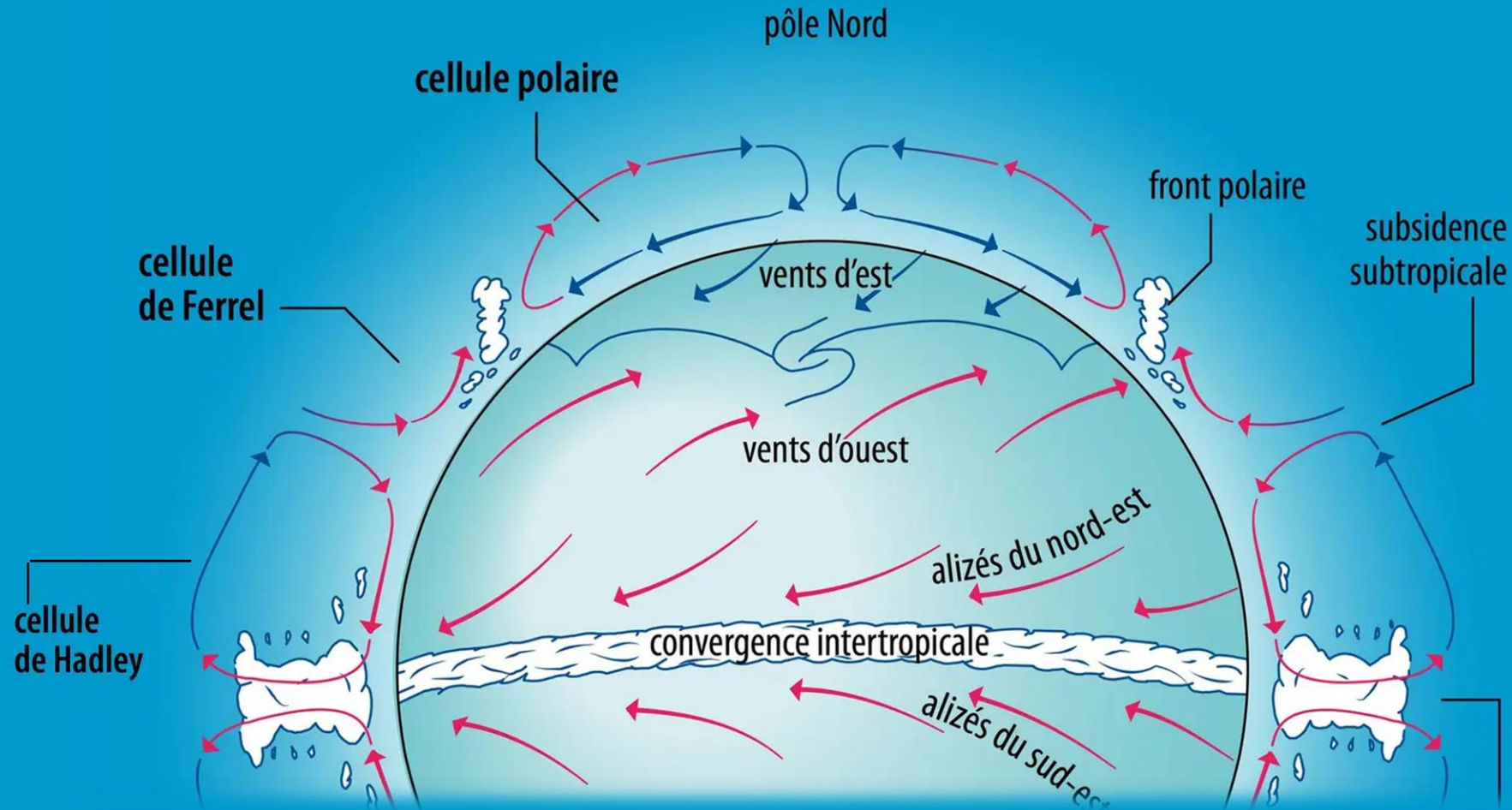


► Fluide barocline



Effets de la stratification

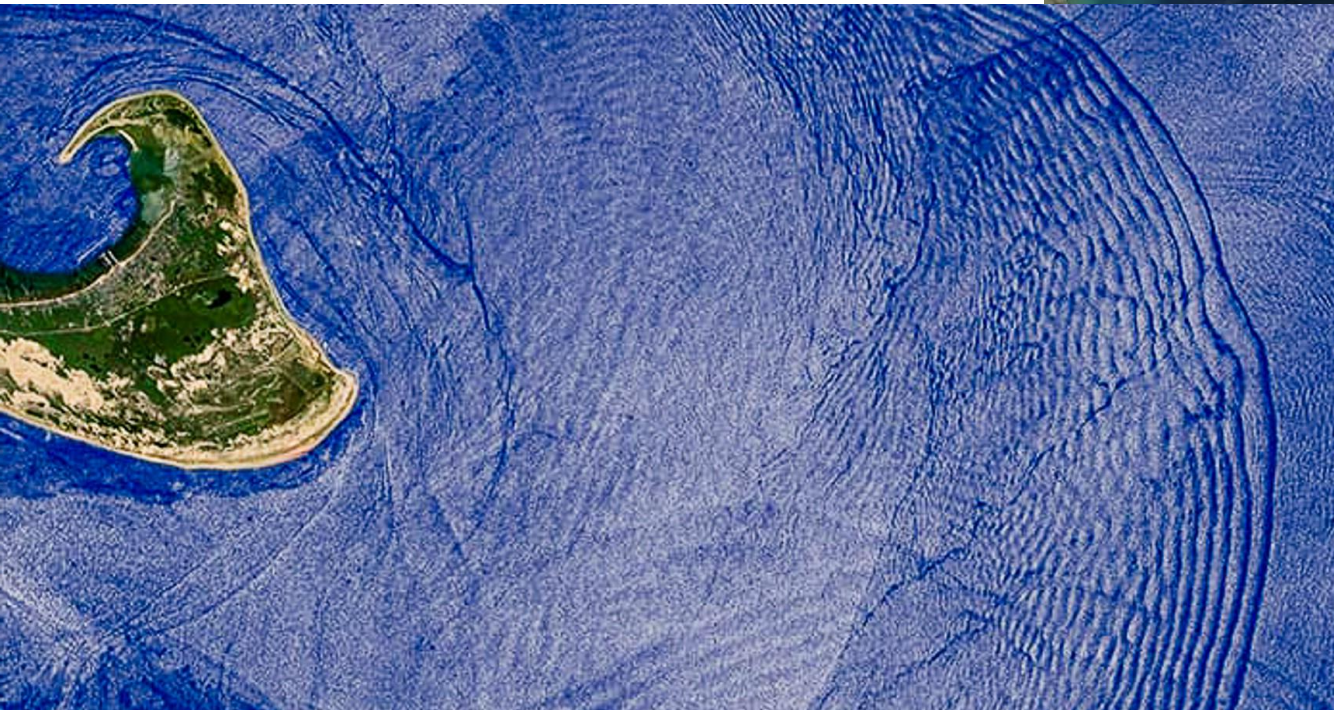
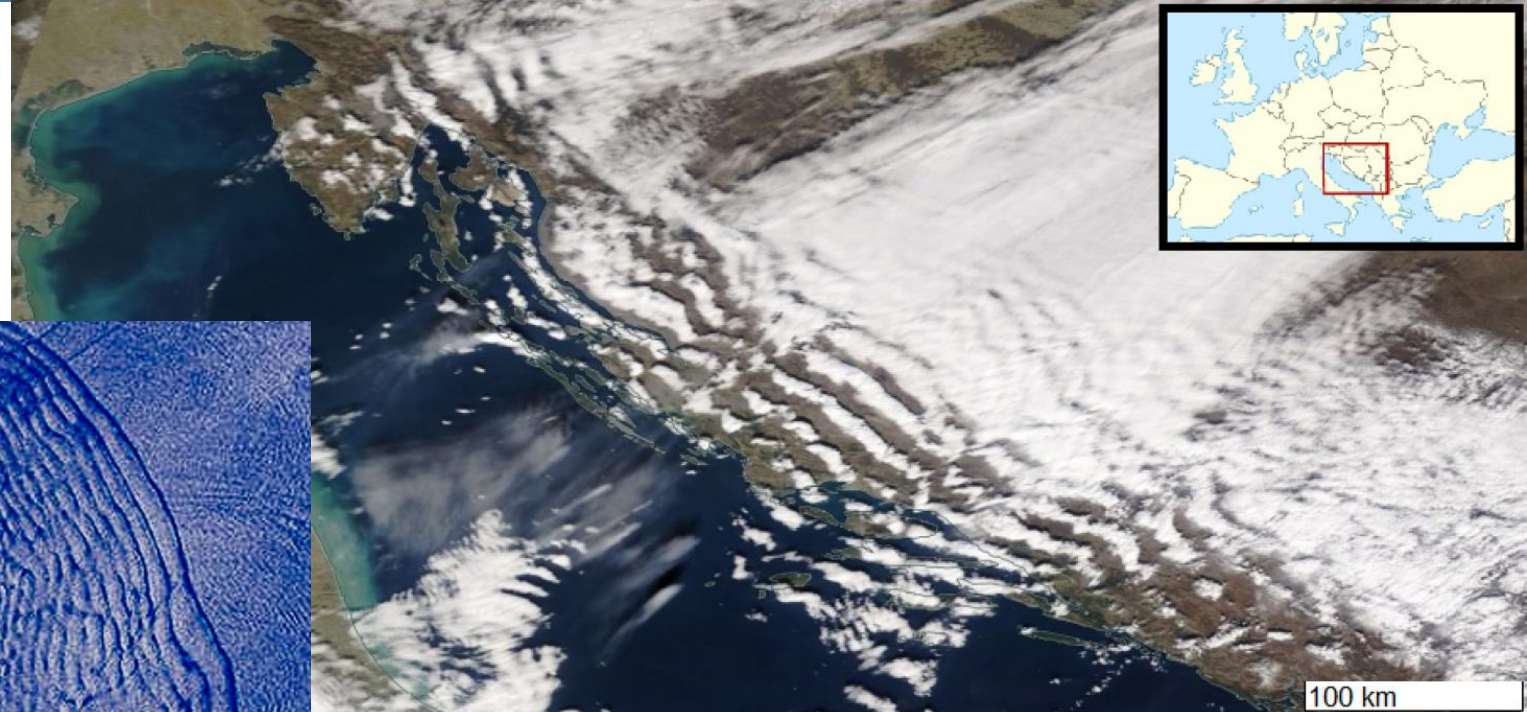
► Structure verticale de l'atmosphère



Effets de la stratification

► Ondes internes

Ondes internes atmosphériques
Balkans, mer Adriatique



Ondes internes océaniques
Trinidad et Tobago, mer des Caraïbes

Conclusion



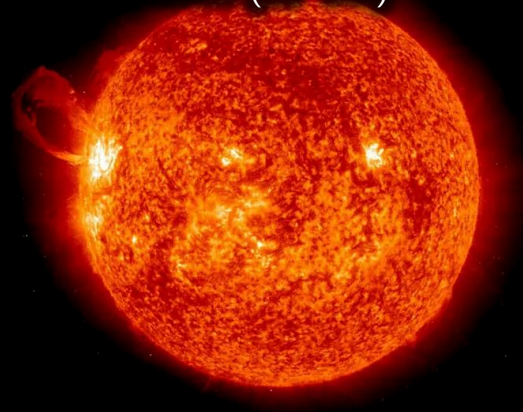
Conclusion

► Objet d'étude : Mécanique des fluides géophysiques et astrophysiques (GAFD)

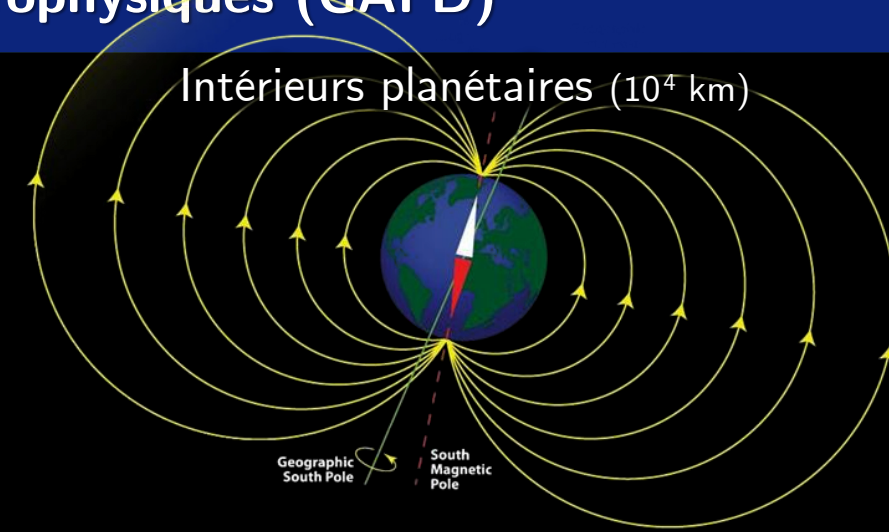
Galaxies & milieu interstellaire (10^{16} km)



Etoiles (10^6 km)



Intérieurs planétaires (10^4 km)



Ecoulements à taille humaine (10 m)



Climat et océans (100 km)



Lunes et satellites (10^3 km)



Merci de votre écoute !



Guillaume Bermudez

Professeur Agrégé de Physique
CY Cergy Paris Université

Ecole d'été des Gustins
Aiguebelette-le-Lac
lundi 17 août 2026

@ guillaume.bermudez@cyu.fr

LES GUSTINS
2026

